1.- Pedro anduvo una determinada distancia a velocidad constante. Si hubiera ido 0,5 km/h más rápido, habría recorrido la misma distancia en $\frac{4}{5}$ del tiempo original, pero si hubiera ido 0,5km/h más despacio, habría tardado $\frac{5}{2}$ de hora más. ¿Cuál fue – en kilómetros – la distancia recorrida por Pedro?

A) $\frac{27}{2}$ **B) 15** C) $\frac{35}{2}$ D) 20 E) 25

Pedro anduvo un espacio e a una velocidad v

1) **(v+0,5)· (4e/5v)= e de aquí: v=2**
2) **(v-0,54)·(e/v + 5/2) = e**
   Como v=2, despejando e obtenemos: e=15

2.- **Si la media aritmética de dos números es 6 y la raíz cuadrada de su producto es 5, una ecuación cuya solución son esos números es:

A) $x^2 + 12x + 25=0$ B) $x^2 + 6x + 5= 0$ C) $x^2 – 12x -25 =0$ **D) x^2 -12x + 25 = 0**
E) x^2 -25x + 12

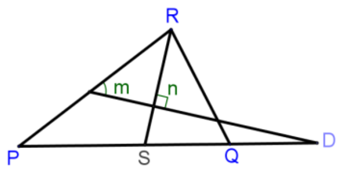
Sean x1 y x2 las raíces: (x1+ x2)/2 =6; √x1·x2= 5; o sea x1+x2= 12; x1·x2=25 que se corresponden (Cardano-Vieta) con –b/a y c/a de una ecuación de segundo grado. Por tanto la solución es D

3.- Hay dos números positivos que, colocados entre el 3 y el 9, hacen que los tres primeros estén en progresión geométrica y los tres últimos en progresión aritmética. La suma de estos dos números positivos es:

A) $\frac{27}{2}$ **B)** $\frac{45}{4}$ C) $\frac{21}{2}$ D) 10 E) $\frac{19}{2}$

La progresión podrá escribirse: 3, 3r, 3r^2, 9 o bien: 3, 9 - 2d, 9 - d, 9
Es decir: 9 – d = 3r^2 y 9 – 2d = 3r de donde: r= 3/2. Por tanto, 3r + 3r^2 = 45/4

4.- En el triángulo *PQR* de la figura, *RS* es bisectriz del ángulo *R* y *D* está en la prolongación de PQ de modo que el ángulo *n* es recto. Entonces:



A) $m=\frac{1}{2}(P-Q)$ **B)** $m=\frac{1}{2}(P+Q)$ C) $D=\frac{1}{2}(P+Q)$

D) $D=\frac{1}{2}m$ E) Nada de lo anterior es correcto.

Sea 2a el ángulo en R. Entonces m= 90-a;
P+Q +2a = 180; o sea P+Q = 2(90-a)= 2m. De donde m= (P+Q)/2

5.- **Si m es un entero positivo y las rectas *y= mx – 1* y *13x + 11y = 700* se cortan en un punto de coordenadas enteras, *m* puede ser:

A) Solamente 4 B) 4, 5 y 6 C) Solamente 5 **D) solamente 6**
E) infinitas posibilidades

Si x es entero, y también lo es.
13x + 11(mx – 1) = 700, o sea x= 711/(11m+3)
11m+3, debe ser un divisor de 711= 3^2*79, con m entero positivo. El único caso en que se verifica esto es para m = 6.

6.- El resto de la división del polinomio $p(x) = x^{100}$ entre $x^2 - 3x + 2$ es:
A) $2^{200} - 1$ **B)** $\mathbf{2^{100}(x-1)-(x-2)}$ C) $2^{100}(x-3)$ D) $(2^{100}-1)x + 2(2^{99}-1)$
E) $2^{100}(x+1)-(x+2)$

El divisor es (x-1)(x-2). Sea C(x) el cociente y ax+b el resto.
X^100 = C(x)(x-1)(x-2)+ax+b Entonces: 1= a+b y 2^100 = 2a + b
a= 2^100 – 1; b= 2 – 2^100.
(2^100-1)x + 2 – 2^100 = 2^100(x-1) – (x-2)

7.- Si el cociente entre las medidas de los dos catetos de un triángulo es $\frac{1}{2}$, el cociente entre las medidas de los correspondientes segmentos de hipotenusa determinados por la altura sobre la misma es:

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{2\sqrt{5}-1}$ D) $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ E) $\frac{1}{5}$

----

a, hipotenusa; b, c catetos; m, n proyecciones de los catetos sobe la hipotenusa.
a^2 = m.n b^2= am; c^2= an. Por tanto: 1 / 4 = b^2 / c^2 = m/n

8.- Isa sale de excursión cuando las agujas de su reloj están juntas entre las 8 y las 9 y llega a su destino entre las 2 y las 3, cuando las agujas forman un ángulo de 180°. ¿Cuánto duró su excursión?

A) 6 horas B) 6 horas y $43 + \frac{7}{11}$ minutos C) 5 horas y $16+\frac{4}{11}$ minutos
D) 6 horas y media E) Nada de lo anterior

Cuando sale de excursión las manecillas están a 240/11 grados por encima de las 8.
[240 + a = 12a; a= 240/11]
Pasadas las 2, justo cuando las manecillas forman 180º, la manecilla grande está igual que antes a 240/11 grados por encima de las 8. [12a – (60+a) = 180; a=240/11]
Por tanto, han pasado exactamente 6 horas.

9.- Si x e y son números reales con $|x| + y = 3$, $|x|y + x^3 = 0$, ¿cuál es el entero más próximo a $x - y$?

A) -3 B) -1 C) 2 D) 3 E) 5

Si x= 0, y=3 y, por tanto, x-y = -3

Si x=/ 0, entonces sólo hay una solución para x e y: x= (1-sqrt(13))/2; y=(7-sqrt(13))/2 y, por tanto, x - y = -3 también.

10.- **Se dispone de cuatro cartas, cada una con una letra en una cara y un número en la otra. Están colocadas sobre una mesa y se lee: A, M, 5, 4.
Juan afirma: "*En cualquiera de las cuatro cartas se verifica que si en una cara hay un número par en la otra hay una vocal*". María quiere comprobar si la afirmación de Juan es cierta o falsa; ¿a cuántas cartas, como mínimo, tendrá que darle la vuelta?

A) 1 **B) 2** C) 3 D) 4 E) Ninguna

Basta con que María compruebe las cartas en las que se ve un número par o una consonante. En donde hay un número impar o una vocal la afirmación es cierta. Es decir, ha de comprobar dos cartas.

11.- La función $f(n)=\dfrac{7n+18}{2n+3}$ toma valores enteros para ciertos valores enteros de *n*. La suma de todos estos $f(n)$ enteros es:

A) 14 B) 21 C) 25 **D) 28** E) 30

----

f(n) = 3 + (n+9)/(2n+3)
para n>6 y n<-9 no hay valores enteros.
f(0)= 6; f(1) = 5; f(2), …, f(5) no enteros; f(6)=4
f(-1)=11; f(-2)= -4; f(-3)=1; f(-4)= 2, f(-5), …, f(-8) no enteros f(-9)= 3
6+5+4+11-4+1+2+3 =28

12.- Si *a, b, c, d* y *e* son enteros distintos y $(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e)=12$, entonces $a+b+c+d+e$ es igual a:

A) 12 B) 16 **C) 17** D) 24 E)32

12= 1·(-1)·2·(-2)·3. De ahí, a= 3; b=5; c=2; d=6; e=1. Por tanto, a + b + c + d + e = 17

13.- **Sea S_n la suma de los n primeros términos de la progresión aritmética 8, 12, … y T_n la suma también de los n primeros términos de la progresión aritmética 17, 19, …. Entonces S_n = T_n para:

A) Ningún valor de n **B) Un valor de n** C) Dos valores de n D) Tres valores de n
E) Más de tres valores de n

Igualando ambas sumas: (8+4n+4)/2 = (17+2n+15)/2 es decir, 12+4n=32+2n, que tiene una única solución (n=10).

14.- Dos segmentos verticales de 20cm y 80cm (están apoyados sobre el suelo) y separados 1 m. El punto de intersección de las rectas que unen el punto de más altura de un segmento con el más bajo del otro (el extremo superior de un segmento con el inferior del otro) está a una altura de

A) 50cm B) 40cm **C) 16cm** D) 60cm E) Nada de lo anterior

Sea h la altura solicitada y x, 100-x las distancias de los extremos inferiores de los segmentos al pie de la altura. Entonces:
x/h = 100/80 y (100-x)/h=100/20 de donde h=16

15.- En una caja hay 9 tarjetas numeradas del 1 al 9. Antonio y Beatriz sacan cada uno al mismo tiempo una tarjeta de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la tarjeta de Antonio sea el doble o más que el número de la tarjeta de Beatriz?

A) $\frac{7}{18}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{28}{81}$ **D)** $\frac{5}{18}$ E) $\frac{1}{3}$

----

2. [(1/9)(4/8)+(1/9)(3/8)+(1/9)(2/8)+(1/9)(1/8)]= 20/72=5/18

16.-** En un triángulo ABC, AB= 4 y AC=8. Si M es el punto medio de BC y AM = 3, ¿cuál es la longitud de de BC?

A) 2√26 **B) 2√31** C) 9 D) 4 + 2√13 E) 5√2

Consideramos en el triángulo ABM la altura *h* desde A al lado BC, con pie en T. Sea a= MC, x=TM; entonces, a-x= BT.
Por el teorema de Pitágoras:
(a-x)^2 + h^2 = 16; (a+x)^2 + h^2= 64; x^2 + h^2 = 9
Restando las dos primeras obtenemos ax= 12 y restando las dos últimas: a^2 + 2ax = 55, de donde sigue que a^2=31 por lo que BC = 2√31

17.- Escribimos en la pizarra todos los enteros del 1 al 2011. María subraya los múltiplos de 2, luego los múltiplos de 3, y luego los múltiplos de 4. ¿Cuántos números ha subrayado exactamente dos veces?

A) 1005 B) 1004 **C) 503** D) 336 E)169

Múltiplos de 12 menores o iguales que 2011: [2011/12]= 167
Múltiplos de 4 que no lo sean de 12: [2011/4] – 167 = 502 – 167 = 335
Múltiplos de 6 que no lo sean de 12: [2011/6] – 167 = 335 – 167 = 168
Luego son tachados <u>exactamente dos veces</u>: 335 + 168 = <u>503 números</u>.

18.- Sea *f(x)* una función definida para todos los números reales tal que *f(x)>0* y *f(a+b)=f(a)·f(b)*. De las siguientes afirmaciones:

I.- *f(0)= 1* II. *f(-a) = 1/(f(a)* *III.- (f(a))^3=f(3a)* *IV.- Si b>a, f(b)>f(a)*

¿cuáles son verdaderas?

A) Solamente III y IV B) Solamente I, III y IV C) Solamente IV
D) Solamente I, II y III E) Todas son verdaderas

I.- *f(0)=f(0+0)=f(0)·f(0)=(f(0))^2, y como f(0)>0 resulta f(0)=1.* Verdadera
II.- *f(a)·f(-a)=f(a-a)=f(0)=1.* Verdadera
III.- *(f(a))^3 = f(a+a+a)=f(3a).* Verdadera
IV.- Tomando la función: *f(x)=1/x* resulta que *2>1* y sin embargo, *f(1)<f(2).* Falsa

19.- Si el área del triángulo ABC es 64cm^2 y la media geométrica de los lados AB y AC es 12 cm., el seno del ángulo A es igual a

A) (√3)/2 B) 3/5 C) 4/5 **D) 8/9** E) 7/18

Sea c=AB, h la altura desde B y b la base correspondiente. Entonces 64 = (1/2)bh = (1/2)bc·senA y como bc= 144 , sen A = 8/9

20.- Disponemos de dos discos. Uno con las dos caras rojas y un segundo disco con una cara roja y la otra azul. Se saca un disco al azar y la cara que se observa es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra cara sea también roja?

A) 1/4 B) 1/2 **C) 2/3** D) 3/4 E) 5/9

Hagamos el árbol del juego: hay tres posibilidades equiprobables de ver una cara roja, en dos de las cuales la otra cara sea roja.

En Resolución de problemas:
2, 5, 10, 13, 16, 18, 19, 20