

LX Olimpiada Matemática Española Concurso Final Nacional Calatayud, 15 y 16 de marzo de 2024 PROBLEMAS y SOLUCIONES

Problema 1: Consideramos 2024 números primos distintos $p_1, p_2, \dots, p_{2024}$ tales que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{1012} = p_{1013} + p_{1014} + \dots + p_{2024}.$$

Sea $A = p_1 p_2 \dots p_{1012}$ y $B = p_{1013} p_{1014} \dots p_{2024}$. Demuestra que $|A - B| \geq 4$.

Solución: Comenzamos observando que las factorizaciones de A y B como producto de primos son distintas, luego forzosamente $A \neq B$.

Si uno de los números primos es 2, podemos suponer sin pérdida de generalidad que este primo es p_1 . En ese caso $p_1 + p_2 + \dots + p_{1012}$ sería impar, por ser la suma de un número par y 1011 números impares, mientras que $p_{1013} + p_{1014} + \dots + p_{2024}$ es par, al ser la suma de 1012 números impares. Por lo tanto, podemos concluir que 2 no aparece en la suma, y que por tanto todos los números son impares.

Sean n_A y n_B , respectivamente, la cantidad de primos de $\{p_1, \dots, p_{1012}\}$ y $\{p_{1013}, \dots, p_{2024}\}$ congruentes con 3 módulo 4. Es claro que el resto de primos son congruentes con 1 módulo 4. Por lo tanto tenemos que

$$3n_A + (1012 - n_A) \equiv p_1 + \dots + p_{1012} \equiv p_{1013} + \dots + p_{2024} \equiv 3n_B + (1012 - n_B) \pmod{4}$$

Esto se reduce a $2n_A \equiv 2n_B \pmod{4}$, y por tanto n_A y n_B tienen la misma paridad. De ahí que

$$A \equiv 3^{n_A} 1^{1012 - n_A} \equiv 3^{n_B} 1^{1012 - n_B} \equiv B \pmod{4}$$

Concluimos que la diferencia entre A y B es un múltiplo no nulo de 4, y por tanto al menos 4. □

Problema 2: Sea n un entero positivo. Sean $x_1, x_2, \dots, x_n > 1$ números reales tales que su producto es $n + 1$. Prueba que

$$\left(\frac{1}{1^2(x_1 - 1)} + 1\right)\left(\frac{1}{2^2(x_2 - 1)} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n^2(x_n - 1)} + 1\right) \geq n + 1$$

y determina cuándo se alcanza la igualdad.

Solución: La demostración de la desigualdad se basará en el siguiente hecho (del cual daremos dos pruebas diferentes):

Sea m un entero con $1 \leq m \leq n$. Como $x_m > 1$, entonces

$$\frac{1}{m^2(x_m - 1)} + 1 \geq \frac{(m + 1)^2}{x_m \cdot m^2}.$$

Además, la igualdad se cumple si y solamente si $x_m = 1 + \frac{1}{m}$.

- Usando la desigualdad entre las medias aritmética y armónica con los $m + 1$ sumandos $\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2(x_m - 1)}$, tenemos que

$$\left(\frac{1}{m^2(x_m - 1)} + m \cdot \frac{1}{m}\right)(m^2(x_m - 1) + m \cdot m) \geq (m + 1)^2,$$

y la conclusión es evidente. La igualdad se alcanza si y solamente si $m^2(x_m - 1) = m$, esto es, $x_m = 1 + \frac{1}{m}$.

- La desigualdad a demostrar se puede reescribir como

$$x_m + m^2 x_m (x_m - 1) \geq (m + 1)^2 (x_m - 1).$$

A su vez, esto es una desigualdad cuadrática en x_m :

$$m^2 \cdot x_m^2 + (-m^2 - (m + 1)^2 + 1)x_m + (m + 1)^2 = (mx_m - m - 1)^2 \geq 0.$$

La desigualdad se cumple siempre; la igualdad se cumple si y solamente si $x_m = 1 + \frac{1}{m}$.

Multiplicando la desigualdad para todos los valores de m , nos queda que

$$\left(\frac{1}{1^2(x_1 - 1)} + 1\right)\left(\frac{1}{2^2(x_2 - 1)} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n^2(x_n - 1)} + 1\right) \geq \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdots (n + 1)^2}{1^2 \cdot 2^2 \cdots n^2}.$$

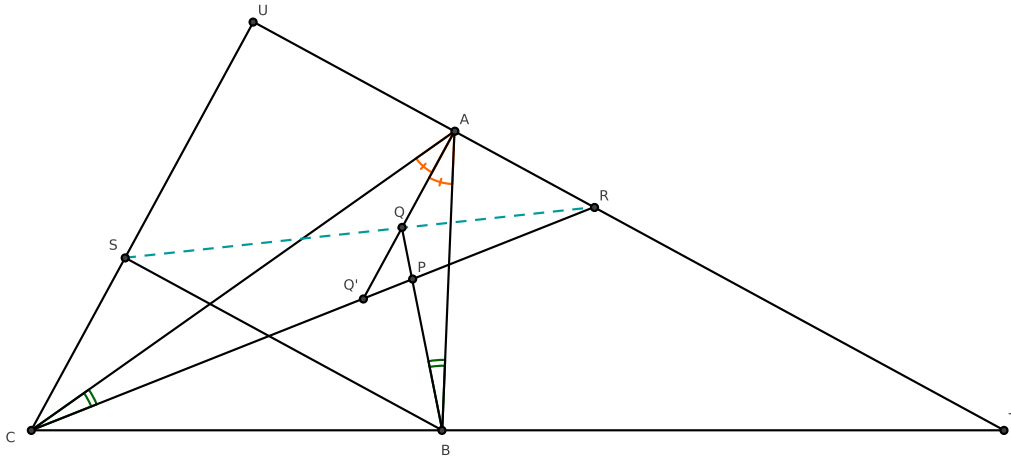
Cancelando los factores repetidos en el numerador y en el denominador y usando que el producto de los x_i es $n + 1$ nos queda el resultado deseado.

Una condición necesaria para tener la igualdad es que $x_m = 1 + \frac{1}{m}$ para todo m . De este modo, todas las desigualdades que hemos usado son igualdades y además se cumple la condición de que el producto es $n + 1$, con lo cual también es una condición suficiente. $\square$

Problema 3: Sean ABC un triángulo escaleno y P un punto interior tal que $\angle PBA = \angle PCA$. La recta PB corta a la bisectriz interior de A en el punto Q ; la recta PC corta a la bisectriz exterior de A en el puntos R . Sea S el punto tal que CS es paralela a AQ y BS es paralela a AR . Demuestra que Q, R, S están alineados.

Solución:

El caso isósceles $AB = AC$ es trivial ya que se dan las coincidencias $P = Q$ y $S = C$.



Asumimos $AB < AC$, y suponemos que la recta AR corta a BC en T y a CS en U , y sea $Q' = AQ \cap CP$. Los segmentos paralelos AQ' y UC son correspondientes en una homotecia de centro R . Veamos que esta homotecia hace corresponder Q con S , para lo cual basta comprobar que se conservan las razones $\frac{AQ}{AQ'} = \frac{US}{UC}$ (es claro que S está entre C y U , y más adelante confirmaremos que Q se encuentra entre A y Q').

Obsérvese que los triángulos ABQ y ACQ' son semejantes, puesto que se tienen las igualdades de ángulos $\angle QAB = \angle Q'AC$ y $\angle ABQ = \angle ACQ'$. En consecuencia se tiene que $\frac{AQ}{AQ'} = \frac{AB}{AC}$ (aquí se confirma que Q está entre A y Q'). Por otra parte, por el teorema de la bisectriz sabemos que $\frac{AB}{AC}$ es igual a $\frac{TB}{TC}$, que a su vez coincide con $\frac{US}{UC}$, por ser $TU \parallel BS$, lo cual prueba que $\frac{AQ}{AQ'} = \frac{US}{UC}$. Luego, y ya como anunciando el final, el problema termina. $\square$

Problema 4: Sean a, b, c, d cuatro números reales que satisfacen

$$abcd = 1 \quad \text{y} \quad a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} + d + \frac{1}{d} = 0.$$

Demuestra que alguno de los números ab, ac, ad es igual a -1 .

Solución 1: Sea $u = a + b + c + d$ y sea $v = ab + ac + ad + bc + bd + cd$. Por las condiciones del enunciado tenemos que

$$abc + bcd + cda + abc = \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -(a + b + c + d) = -u.$$

Por lo tanto, el polinomio que tiene por raíces a, b, c, d es

$$p(x) = x^4 - ux^3 + vx^2 + ux + 1.$$

Observemos que hay una cierta simetría en los coeficientes de $p(x)$. En efecto,

$$x^4 p\left(-\frac{1}{x}\right) = x^4 (x^{-4} + ux^{-3} + vx^{-2} - ux^{-1} + 1) = 1 + ux + vx^2 - ux^3 + x^4 = p(x).$$

En particular, como $p(a) = 0$ y $a \neq 0$ (ya que $abcd = 1$), tenemos que $p\left(-\frac{1}{a}\right) = 0$. No podemos tener $-\frac{1}{a} = a$ al ser a un número real, por lo tanto $-\frac{1}{a}$ ha de ser una de las otras raíces de $p(x)$, y por tanto $-1 \in \{ab, ac, ad\}$. $\square$

Solución 2: Como $abcd = 1$, tenemos que

$$abc + bcd + cda + dab + a + b + c + d = \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + a + b + c + d = 0.$$

Ahora, expandiendo, se comprueba que

$$\begin{aligned} (ab + 1)(ac + 1)(ad + 1) &= \\ a(abc + bcd + cda + dab + a + b + c + d) + (a^2 - 1)(abcd - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, uno de los factores $ab + 1, ac + 1, ad + 1$ es igual a 0, con lo que $-1 \in \{ab, ac, ad\}$. $\square$

Problema 5: Dados dos puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$ en el plano, denotamos por $\mathcal{R}(p_1, p_2)$ el rectángulo con lados paralelos a los ejes de coordenadas que tiene los dos puntos como esquinas opuestas, es decir: $\mathcal{R}(p_1, p_2) =$

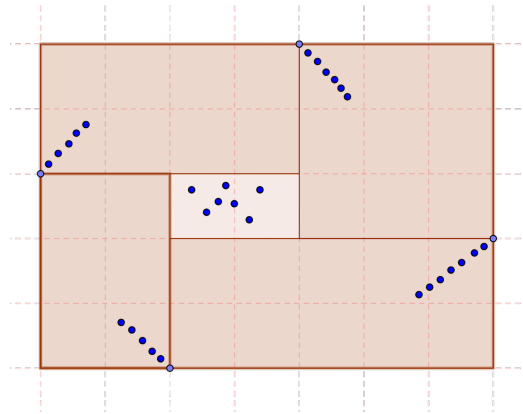
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \min(x_1, x_2) \leq x \leq \max(x_1, x_2), \min(y_1, y_2) \leq y \leq \max(y_1, y_2)\}.$$

Determina el mayor valor de k tal que el siguiente enunciado es cierto: “para todo conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, con $|\mathcal{S}| = 2024$, existen dos puntos $p_1, p_2 \in \mathcal{S}$ tales que $|\mathcal{S} \cap \mathcal{R}(p_1, p_2)| \geq k$ ”.

Solución: La respuesta es $k = \frac{2024+6}{5} = 406$.

Demostremos, en primer lugar, que siempre existen dos puntos, $p_1, p_2 \in \mathcal{S}$ tales que $|\mathcal{S} \cap \mathcal{R}(p_1, p_2)| \geq 406$. Si todos los puntos de $\mathcal{S}$ tienen la misma coordenada x (o misma y), escogiendo los puntos extremos de la recta siempre tenemos $|\mathcal{S} \cap \mathcal{R}(p_1, p_2)| = 2024 \geq k$. Supongamos ahora que no todos los puntos tienen la misma coordenada x ni la misma coordenada y .

Sean p_1, p_2 puntos con coordenada x mínima y máxima respectivamente, y sean q_1, q_2 puntos con coordenada y mínima y máxima respectivamente. Consideremos los 5 rectángulos $\mathcal{R}(p_1, q_2)$, $\mathcal{R}(q_2, p_2)$, $\mathcal{R}(p_2, q_1)$, $\mathcal{R}(q_1, p_1)$ y $\mathcal{R}(p_1, p_2)$. Estos rectángulos cubren todos los puntos, y los puntos q_1 y q_2 están en al menos 2 rectángulos y los p_1 y p_2 están en la menos 3 rectángulos. Por tanto, uno de esos rectángulos cubre al menos $\frac{2024+6}{5}$ puntos. (Los casos en que ocurra que $p_i = q_j$ son más sencillos de comprobar).



Para ver que 406 es el valor máximo, hacemos una construcción como la de la figura: en el interior de cada rectángulo de los bordes hay 404 puntos; los 404 puntos del interior del rectángulo central, $\mathcal{R}(p_1, p_2)$, están fuera de los otros cuatro rectángulos. Al contar también los 4 puntos extremos comprobamos que ninguno de los cinco rectángulos contiene más de 406 puntos. $\square$

Problema 6: Sean a , b y n enteros positivos, que satisfacen que bn es divisor de $an - a + 1$. Sea $\alpha = a/b$. Demuestra que, al dividir los números $\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \dots, \lfloor (n-1)\alpha \rfloor$ entre n , los restos resultantes son iguales a $1, 2, \dots, n-1$, en algún orden.

Solución: Puesto que $\lfloor 0\alpha \rfloor = 0$, basta con demostrar que no existen dos valores $0 \leq i < j \leq n-1$ tales que $\lfloor i\alpha \rfloor \equiv \lfloor j\alpha \rfloor \pmod{n}$. Por reducción al absurdo, supongamos que esos dos valores existen y sea r el resto común. Si s es el resto de ia módulo b , con $0 \leq s < b$, el número ia se puede expresar como

$$\frac{ia}{b} = i\alpha = \lfloor i\alpha \rfloor + \frac{s}{b} = kn + r + \frac{s}{b}$$

para un entero k . Análogamente, si t es el resto de ja módulo b , con $0 \leq t < b$, entonces

$$\frac{ja}{b} = \ell n + r + \frac{t}{b}$$

para algún ℓ . Tomando la diferencia de las dos expresiones, obtenemos

$$\frac{(j-i)a}{b} = (\ell - k)n + \frac{t-s}{b}.$$

Multiplicando la expresión anterior por b , y tomando módulo bn , se obtiene

$$(j-i)a \equiv t-s \pmod{bn}.$$

Multiplicando a ambos lados por $n-1$ se obtiene

$$(j-i)(n-1)a \equiv (t-s)(n-1) \pmod{bn}.$$

La condición del enunciado implica que $(n-1)a \equiv -1 \pmod{bn}$, luego

$$(t-s)(n-1) + (j-i) \equiv 0 \pmod{bn}.$$

Esos valores satisfacen $1 \leq j-i \leq n-1$ y $-(b-1) \leq t-s \leq b-1$, luego $-bn < -(b-1)(n-1) \leq (t-s)(n-1) + (j-i) \leq (b-1)(n-1) + (n-1) < bn$, y por tanto la única posibilidad es que

$$(t-s)(n-1) + (j-i) = 0.$$

En este caso $j-i$ es divisible por $n-1$, lo cual solo es posible con $i=0$ y $j=n-1$. Pero eso significa que $s=0$ (puesto que $0a \equiv 0 \pmod{b}$), lo cual conlleva que

$$0 = (t-s)(n-1) + (j-i) = (t+1)(n-1) > 0,$$

obteniendo la contradicción buscada. □