

Sesión de Preparación de Olimpiada Matemática.

9 de Enero de 2026.

Problemas de Fases Locales de OME.

Problema 1. (2025)

Sea $q(x)$ un polinomio de grado 2023 que cumple que $q(n) = \frac{1}{n}$ para todo $n = 1, 2, \dots, 2024$. Halla el valor $q(2025)$.

Ayuda: considera el polinomio $p(x) = xq(x) - 1$.

Problema 2. (2025)

Determina el menor entero positivo n que tiene al menos 4 divisores diferentes a, b, c, d , con $1 < a, b, c, d < n$, de forma que $a + b + c + d = 1001$.

Ayuda: los 4 divisores son menores o iguales que $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{4}$ y $\frac{n}{5}$.

Problema 3. (2025)

Encuentra todas las funciones $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ que cumplen, para $x, y > 0$ cualesquiera, que

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

Ayuda: expresa $f(f(x)f(y))$ de dos formas distintas.

Problema 4. (2025)

Halla todos los números enteros a, b que satisfacen la ecuación

$$a(a^2 + b^2) + 7 = 5a^2 + 3b^2.$$

Ayuda: agrupa $a^2 + b^2$ en el segundo miembro.

Problema 5. (2025)

Consideramos una lista con los números $0, 1$ y $\sqrt{3}$. De forma sucesiva, se va aplicando la siguiente operación: se escoge uno de los tres números de la lista y se le añade un múltiplo racional arbitrario de la diferencia entre los otros dos. Repitiendo este proceso, ¿es posible conseguir que los tres números de la lista sean $0, \sqrt{3} - 1$ y $\sqrt{3} + 1$?

Ayuda: identifica cada número $x + y\sqrt{3}$ con el punto (x, y) e interpreta la operación como un movimiento de uno de los vértices de un triángulo.

Problema 6. (2024)

Hallar el menor entero positivo n tal que la suma de los n términos

$$A(n) = 1 + 11 + 111 + \dots + 11 \dots 11$$

sea divisible por 45.

Ayuda: un número entero es divisible por 45 si y sólo si es divisible por 5 y por 9.

Problema 7. (2024)

Sea $P(x)$ un polinomio de grado 5 y sean a y b números reales diferentes de 0. Supongamos que el resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax + b$ es igual al resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax^2 + b$. Determinar el valor de $a + b$.

Ayuda: Evalúa las igualdades que resultan de la división entera en $x = 0$ y en $x = 1$.

Problema 8. (2024)

Sea $a > 1$ un número real. Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$$

en términos de a .

Ayuda: eliminando raíces cuadradas se llega a un polinomio de grado 4 que se puede factorizar en un producto de dos de segundo grado.

Problema 9. (2024)

En cada casilla de un tablero de 1000×2024 está escrito un número y no todos ellos son ceros. Para cada casilla, si A es la suma de todos los números escritos en la fila de la casilla (incluido el número de casilla) y B es la suma de todos los números de la columna de la casilla (incluido el número de la casilla), entonces el número escrito en la casilla es igual al producto AB . Hallar la suma de todos los números del tablero y dar un ejemplo de tablero que tenga, en cada fila, todos los números distintos, y en cada columna, todos los números distintos.

Ayuda: considera el valor de la suma de cada fila y el de cada columna.

Problema 10. (2023)

Sea n un entero positivo. Cada uno de los números $1, 2, 3, \dots, 2023$ se pinta de un color a escoger entre n distintos. Una vez coloreados, se observa que cualquier par (a, b) , con $a < b$ y de manera que $a \mid b$, satisface que a y b son de distinto color. Encontrar el menor valor de n para el cuál esta situación es posible.

Ayuda: las potencias $1 = 2^0, 2^1, \dots, 2^{10} = 2014$ están entre los números considerados.

Problema 11. (2023)

Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Ayuda: siendo $z = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$ se verifica que $\frac{1}{z} - 1 = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \left(\frac{1}{y} - 1\right)$.

Problema 12. (2023)

Sea $n \geq 2$ un entero positivo. Dividimos un rectángulo de $n \times (n + 1)$ en piezas rectangulares: dos de 1×1 , dos de 1×2 , ..., y dos de $1 \times n$, con la propiedad de que para cada $k \geq 2$, una pieza de $1 \times k$ tiene los lados largos horizontales y la otra verticales. Demostrar que las dos piezas de 1×1 comparten un lado.

Ayuda: inducción en n , ¿donde tienen que estar las piezas más grandes?

Problema 13. (2022)

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ números reales diferentes, de manera que ninguno de ellos es igual a 0. Supongamos que

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_5^2)(a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_6^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_5a_6)^2.$$

Probar que los números $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ están en progresión geométrica.

Ayuda: considera cuándo se verifica la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Problema 14. (2022)

Hallar todas las ternas de números reales (a, b, c) que cumplen el sistema

$$\begin{cases} a + b + c &= 3, \\ 2^a + 2^b + 2^c &= 7 \\ 2^{-a} + 2^{-b} &= \frac{3}{4} \end{cases}$$

Ayuda: determina primero los posibles valores de c .

Problema 15. (2021)

Hallar todos los números de cuatro cifras tales que al añadirles un cero entre cualesquiera dos de sus cifras, los números de cinco cifras resultantes son todos múltiplos de 7.

Ayuda: resta parejas de los números de 5 cifras que se obtienen.

Problema 16. (2020)

Consideremos el polinomio

$$p(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a).$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si, y solamente si, $a = b = c$.

Ayuda: considerar la gráfica de la parábola $y = p(x)$ y el caso de igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Problema 17. (2019)

Fijemos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ayuda: estudia el grado de cada miembro de la igualdad.

Problema 18. (2018)

Sean $a \geq 1$ y $b \geq 1$ números naturales cuyo máximo común divisor y mínimo común múltiplo designamos por D y M , respectivamente. Demostrar que

$$D^2 + M^2 \geq a^2 + b^2.$$

Ayuda: utiliza que $ab = DM$.