

PREPARACIÓN OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA (CURSO 2025-26)
PRINCIPIO DEL PALOMAR 23-01-2026

Supongamos que tenemos 20 palomas y 6 palomares donde se cobijan, y que en cada palomar cabe cualquier número de palomas. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

-) En cada palomar se mete al menos una paloma.
-) No quedan palomares vacíos.
-) Al menos un palomar cobija más de una paloma.
-) En cada palomar hay como máximo 3 palomas.
-) Hay algún palomar donde hay más de 3 palomas.

Principio del palomar o principio de Dirichlet:

si M palomas ocupan N nidos y M es mayor que N , entonces hay al menos un nido con dos o más palomas.

si M palomas ocupan N nidos y M es mayor que N , entonces no es posible que en cada nido haya menos de $\frac{M}{N}$ palomas.

- 1) Demuestra que entre seis personas hay un grupo de tres personas que o bien se conocen todas entre sí o bien no se conoce ninguna entre sí.
- 2) A una comida asisten 10 personas que se sientan en una mesa redonda. Delante de cada plato hay un cartel con el nombre del comensal, pero se sientan al azar y ninguno de ellos se sienta en el lugar que le corresponde. Demuestra que se puede girar la mesa de modo que al menos dos personas estén en su sitio.
- 3) En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes. Se sabe que en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demuestra que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo. (Fase Nacional 1993)
- 4) Escojamos al azar n números naturales. a) Prueba que siempre hay dos de ellos cuya diferencia es múltiplo de $n-1$. b) Prueba que o uno de ellos es múltiplo de n o hay dos de ellos cuya diferencia es múltiplo de n . c) Prueba que hay un subconjunto de esos números cuya suma es múltiplo de n .
- 5) Justifica que entre los términos de la sucesión de Fibonacci, hay dos cuya diferencia es múltiplo de 2026.
- 6) Prueba que hay una potencia de tres que acaba en 001. Generaliza el resultado.

- 7) Escoge un número natural cualquiera, n , y un dígito no nulo, a . Prueba que hay un múltiplo de n que está formado solo por a y 0 . Y si n no tiene los factores primos 2 y 5 , entonces hay un múltiplo de n formado solo por a .
- 8) Se da un conjunto de 10 enteros positivos de dos cifras. Prueba que hay dos subconjuntos disjuntos de ese conjunto de números cuyos elementos tienen la misma suma.
- 9) En una circunferencia se efectúan diez marcas, y se asignan aleatoriamente los números del 1 al 10 a esas marcas. Considera todas las sumas que se pueden formar con tres de ellos consecutivos. Justifica que siempre existirá una suma que presente un resultado superior a 16 .
- 10) En un hexágono regular de lado unidad se sitúan 19 puntos. Demuestra que hay al menos un par de ellos separados por una distancia no mayor que $\sqrt{3}/3$. (Fase Local 2011)
- 11) Considera 37 puntos en el espacio con coordenadas enteras. Prueba que se pueden encontrar entre ellos tres puntos tales que su baricentro tiene también coordenadas enteras.
- 12) A un concierto asisten 2025 personas de cuatro nacionalidades. Cada persona paga por su entrada un número entero de euros entre 1 y 510 inclusive.
- Prueba que al menos dos personas de la misma nacionalidad pagaron el mismo precio.
 - Se saben que se vendieron al menos una entrada de cada precio y que el máximo número de entradas que se vendieron de cada precio fueron 10 . ¿Cuáles fueron las cantidades máxima y mínima que se pudieron recaudar en el concierto?
- 13) 41 torres de ajedrez se colocan en un tablero de 8×8 . Probar que tiene que haber 6 que no se atacan entre sí.
- 14) Las casillas de un tablero de 15×15 se pintan en tres colores azul, verde y rojo. Prueba que hay al menos dos columnas con el mismo número de casillas de al menos uno de los colores.

- 15) Sea x un número irracional. Justifica que hay un entero n tal que la distancia desde nx a algún entero es menor que 0,001.
- 16) Prueba que en toda sucesión de n^2+1 términos hay una subsucesión de $n+1$ términos que es o bien no creciente o bien no decreciente. (Teorema de Erdős-Szekeres)