

Preparación Olimpiada Matemática Española

Curso 2025/2026

POLINOMIOS

28 de noviembre de 2025

Aspectos teóricos:

- Raíces de un polinomio: cantidad de raíces, raíces racionales y tamaño de raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros, teorema del resto, regla de Ruffini
- Fórmulas de Cardano-Vieta, polinomios simétricos
- Los polinomios como funciones continuas
- Los polinomios como herramienta para encapsular información

1. Problemas varios

Calentamiento

Problema 1.1. Sean a , b y c las soluciones de la ecuación $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Hallar los coeficientes p , q y r , sabiendo que $a + b$, $a + c$ y $b + c$ son raíces del polinomio $x^3 - 6x^2 + 4x + 9$.

Problema 1.2. Hallar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ xyz = 4 \end{cases}$$

Problema 1.3. Las raíces del polinomio $x^3 - 14x^2 + bx - 84$ son los lados de un triángulo rectángulo. Hallar b .

Problema 1.4. Sean α_1 , α_2 , α_3 , α_4 y α_5 las raíces del polinomio $x^5 + x^2 + 1$, y sea $q(x) = x^2 - 2$. Hallar el valor de $q(\alpha_1)q(\alpha_2)q(\alpha_3)q(\alpha_4)q(\alpha_5)$.

Problema 1.5. Sean a y b dos números enteros. Probar que el polinomio $(x - a)(x - b)(x - 3) + 1$ tiene a lo sumo una raíz entera.

Algún ejemplo reciente de la fase local

Problema 1.6 (LV OME 2019). Fijemos un número natural $n \geq 1$. Encontrar todos los polinomios $p(x)$ que cumplan

$$p(x^n) - p(nx) = x^n p(x)$$

para cualquier valor real x .

Problema 1.7 (LVI OME 2020). Consideremos el polinomio $p(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$. Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo valor real de x si y solo si $a = b = c$.

Problemas judíos

Problema 1.8. Resolver la siguiente ecuación, donde y es un número real:

$$2\sqrt[3]{2y - 1} = y^3 + 1.$$

Problema 1.9. Resolver la ecuación

$$\sin^7 x + \frac{1}{\sin^3 x} = \cos^7 x + \frac{1}{\cos^3 x}.$$

2. Problemas de la Olimpiada Matemática Española (fase final)

Problema 2.1 (VII OME 1970). Sabiendo que los polinomios

$$2x^5 - 13x^4 + 4x^3 + 61x^2 + 20x - 25 \quad \text{y} \quad x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 28x^2 + 85x + 50$$

tienen dos raíces dobles en común, hallar todas sus raíces.

Problema 2.2 (XIII OME 1976). Demostrar que el polinomio $z^4 + 4(i+1)z + 1$ tiene una raíz en cada cuadrante del plano complejo.

Problema 2.3 (XV OME 1979). Demostrar la igualdad

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Problema 2.4 (XXI OME 1985). Dado el polinomio $f(x) = x^5 - px - 1$, estudiar qué valores puede tomar p de modo que dos de sus raíces sean a su vez las raíces de otro polinomio $x^2 - ax + b$ mónico, de grado dos y coeficientes enteros.

Problema 2.5 (XXVII OME 1991). Supongamos que el polinomio $x^3 + px^2 + qx + r$, de coeficientes reales, con $r \neq 0$, tiene tres raíces reales positivas. Determinar qué relación deben cumplir entre sí los coeficientes p , q y r de modo que las tres raíces sean las longitudes de los lados de un triángulo.

Problema 2.6 (XXXVI OME 2000). Sean los polinomios de coeficientes reales

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \quad \text{y} \quad Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1,$$

con $a \neq c$. Hallar las condiciones que deben cumplir a , b y c para que $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes y resolver en ese caso las dos ecuaciones $P(x) = 0$ y $Q(x) = 0$.

Problema 2.7 (XXXVIII OME 2002). Hallar todos los polinomios de coeficientes reales $P(t)$ que cumplan que

$$P(x^2 - y^2) = P(x - y)P(x + y)$$

para cualesquiera números reales x e y .

Problema 2.8 (XXXIX OME 2003). Sea x un número real tal que $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Probar que tanto x como x^2 son irracionales.

Problema 2.9 (LI OME 2015). Sobre la gráfica de una función polinómica con coeficientes enteros, se eligen dos puntos con coordenadas enteras. Probar que si la distancia entre ellos es un número entero, entonces el segmento que los une es paralelo al eje de abscisas.

Problema 2.10 (LVI OME 2020). Se dice que un polinomio de coeficientes reales $p(x)$ es almeriense si es de la forma $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + a$ y sus tres raíces están en progresión aritmética. Hallar todos los polinomios almerienses tales que $p(7/4) = 0$.

Problema 2.11 (LVIII OME 2022). Sean a , b , c y d cuatros números reales positivos. Si se cumple que

$$a + b + \frac{1}{ab} = c + d + \frac{1}{cd} \quad \text{y} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + cd,$$

entonces demostrar que al menos dos de los valores a , b , c y d son iguales.

Problema 2.12 (LIX OME 2023). Sean $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ cuatro números reales. Probar que existen dos polinomios de coeficientes reales de grado dos $P(x)$ y $Q(x)$ tales que x_1 , x_2 , x_3 y x_4 son las raíces de $P(Q(x))$ si y solo si $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.