

Teoría de Números

Víctor Mesa

1. **(V́ctor's Notebook)** Decimos que un natural n es un número natural *karamatero* si tiene exactamente 4 divisores propios y la suma de los inversos de tales divisores es 1. Determine cuántos naturales *karamateros* existen
2. **(Clásico)** Demuestre que si $ab = cd$, entonces $a + b + c + d$ no es un número primo.
3. **(Euler Olympiad)** Sea $\mathcal{S}(n)$ el valor final obtenido después de sumar repetidamente los dígitos de n hasta obtener un número de una sola cifra. (Por ejemplo: $\mathcal{S}(789) = 6$, porque la suma de los dígitos de 789 es 24 y la de 24 es 6). Calcula la siguiente suma:
$$\mathcal{S}(1^2) + \mathcal{S}(2^2) + \cdots + \mathcal{S}(2025^2).$$
4. **(Putnam 1992)** Encuentra todos los a, b, m, n naturales tales que $\text{mcd}(m, n) = 1$ que verifiquen la siguiente igualdad: $(a^2 + b^2)^m = a^n b^n$
5. **(Ibero 2012)** Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tales que $a - b + c - d$ es impar y divide a $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$. Demuestra que, para todo entero positivo n , $a - b + c - d$ divide a $a^n - b^n + c^n - d^n$.
6. **(Olimpiada Cubana 'El reto')** Determine todos los enteros de cuatro cifras $\overline{abcd}$ tales que $\overline{abcd} = 11(a + b + c + d)^2$
7. **(Fuente desconocida)** Sea p primo y $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{Z}$. Probar que si $x_1^n + \cdots + x_p^n \equiv 0 \pmod{p}$ para todo $n > 0$, entonces $x_1 \equiv \cdots \equiv x_p \pmod{p}$.
8. **(IMO SL 2013)** Sea $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$. Hallar todas las funciones que satisfacen
$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n \quad \text{para todos } m, n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$
9. **(Iran 2005)** Sean $n, p \in \mathbb{N}$ tales que $n \mid (p - 1)$ y $p \mid (n^3 - 1)$. Demuestre que $4p - 3$ es un cuadrado perfecto.
10. **(pOMA 2025)** Determina todos los pares $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que:

$$x^y + y^x = x! + y!$$