

# Teoría de Juegos

Darío Fuenmayor, Atlas Troyano y Carmen Zuleta

13 febrero 2026

## 1. Pasatiempos

**Problema 1.** ¿Se puede cubrir un tablero de ajedrez con piezas de dominó? ¿Y si le quitas dos esquinas opuestas?

**Problema 2.** Atlas y Bo juegan al siguiente juego:

Atlas dice 1 o 2. después Bo, debe sumar 1 o 2 al número que ha dicho Atlas y decirlo en alto. En los siguientes turnos, cada jugador suma 1 o 2 al número que ha dicho el contrario. Ninguno de ellos puede decir un número mayor a 100 y pierde el jugador que diga 100.

¿Tiene alguno de ellos estrategia ganadora?

**Problema 3.** Dados 5 puntos en una esfera, demostrar que al menos 4 de ellos están en el mismo hemisferio.

**Problema 4.** Carmen y Darío tienen cada uno un número natural en la cabeza. Cada uno ve el número de la otra persona. Con el objetivo de que alguno adivine el número de su propia cabeza, escriben sin comunicarse una ristra finita de números cada uno. Si ninguno consigue que su número esté en su propia lista, se quedan sin postre.

## 2. Problemas

**Problema 5.** Dado un collar de  $2n$  perlas negras y  $2n$  perlas blancas, ¿se puede cortar el collar en dos para que queden  $n$  perlas blancas y  $n$  negras en cada trozo?

**Problema 6** (Juego del 15). Tenemos una caja con 15 fichas cuadradas enumeradas y ordenadas en orden creciente, de tal forma que la esquina inferior derecha esté vacía. Probar si es posible obtener la misma configuración, pero con el 14 y el 15 intercambiados de lugar, deslizando las piezas.

**Problema 7.** Sea  $n \geq 3$  un entero positivo. Los primeros  $n$  enteros positivos,  $1, 2, \dots, n$ , se escriben en una pizarra. María realiza el siguiente proceso tantas veces como quiera: primero elige dos números en la pizarra, y luego los reemplaza con aquellos que resultan de sumarle a ambos un mismo entero positivo. Determinar todos los enteros positivos  $n$  para los que María puede conseguir, repitiendo este proceso, que todos los números de la pizarra sean iguales.

**Problema 8** (Hex). Atlas y Bo juegan al siguiente juego:

En un folio, hay dibujados 6 vértices formando un hexágono. Se turnan usando dos colores: Atlas usa el Azul y Bo el Bermellón. En su turno, Atlas dibuja una arista azul uniendo dos de los vértices, y en el suyo, Bo dibuja una bermella de igual forma. Ninguno de los dos jugadores puede pintar una arista ya pintada. Pierde el jugador que dibuje un triángulo que tenga como vértices 3 de los del hexágono y que cuyas aristas sean del mismo color.

¿Tiene alguno de ellos una estrategia ganadora?

**BONUS:** Si jugasen sobre 15 vértices de forma cooperativa, ¿hasta qué turno podrían llegar sin perder?

**Problema 9.** Carmen y Darío tienen una cantidad infinita de monedas idénticas. Por turnos, tienen que colocar una moneda en una mesa cuadrada finita de forma que no solapen otras monedas y no sobrepasen los bordes de la mesa. El primer jugador que no pueda colocar una moneda friega los platos. Asumiendo que al menos una moneda cabe en la mesa, prueba que el primer jugador tiene estrategia ganadora (lavadora).

**Problema 10.** Encuentra el menor  $n$  entero positivo tal que si coloreamos  $n$  casillas de un tablero  $1000 \times 1000$  del mismo color entonces forzosamente habra una trupla de casillas cuyos centros formen un triangulo rectángulo con dos de sus lados paralelos a los lados del tablero.

**Problema 11.** Se colorea el plano de 3 colores distintos: amarillo, bermellón y celeste. Demostrar que hay dos puntos a distancia 1 del mismo color.

**Problema 12.** Tienes 7 gnomos y cada uno está secuestrado por la misma persona. El secuestrador les dice: 'Tengo estos 7 colores de pintura y voy a pintar vuestros gorros de uno de esos colores. Entonces, a la de 3 vais a tener que decir el color del que creéis que es vuestro gorro. Si alguno de vosotros acierta, seréis libres. Si no, os zampo'. Antes de ponerse los gorros, los gnomos discuten una estrategia. ¿Salvan el pellejo?