

PEDRO

Pedro Ramírez y Atlas (en espíritu)

12 Diciembre 2025

Problema 1. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y D , E y F tres puntos cualesquiera sobre los lados AB , BC y CA respectivamente. Llamemos P al punto medio de AE , Q al punto medio de BF y R al punto medio de CD . Probar que el área del triángulo $\triangle PQR$ es la cuarta parte del área del triángulo $\triangle DEF$.

Problema 2. Probar que $2026^{2025} - 1019^{2025} - 1007^{2025}$ es múltiplo de $2026^3 - 1019^3 - 1007^3$.

Problema 3. Consideramos un número primo p . Debemos diseñar un torneo de p -archís sujeto a las siguientes reglas:

- En el torneo participan p^2 jugadores.
- En cada partida juegan p jugadores.
- El torneo se divide en rondas. Las rondas se dividen en partidas. Cada jugador juega una, o ninguna, partida en cada ronda.

Al final del torneo cada jugador se ha enfrentado exactamente una vez con cada uno de los otros jugadores. Determinar si es posible diseñar un torneo así. En caso afirmativo, obtener el mínimo número de rondas que puede tener el torneo

Problema 4. Calcular el número máximo de raíces reales distintas que puede tener un polinomio P que verifique la siguiente propiedad: el producto de dos raíces distintas de P sigue siendo una raíz de P .

Problema 5. Demuestra que para todo $n \geq 2$ podemos encontrar n números reales $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 1$ de manera que los productos $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ y $\frac{1}{1-x_1} \frac{1}{1-x_2} \cdots \frac{1}{1-x_n}$ son iguales.

Problema 6. Determinar todos los valores reales de (x, y, z) para los cuales

$$x + y + z = 1$$

$$x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2$$

$$x^3 + y^2 + z = y^3 + z^2 + x$$

Problema 7. Sean a, b, c número reales distintos tales que $a + b + c = 0$ y $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$. Calcula todos los valores posibles de $ab + ac + bc$

Problema 8. Para todo entero positivo k , sea $s(k)$ el número de unos en la representación binaria de k . Demostrar que para todo $n > 0$ se tiene $\sum_{i=1}^n (-1)^{s(3i)} > 0$

Problema 9. Determina todos los números enteros positivos n , para los cuales $S_n = x^n + y^n + z^n$ es constante, cualesquiera que sean x, y, z reales tales que, $xyz = 1$ y $x + y + z = 0$.

Problema 10. Determina si existe una función $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $f(m + nf(m)) = f(n)^m + m \cdot 2026!$.