

Variado

Víctor Mesa - Joaquín González - Andrea Vega - José Martínez

7-11-2025

Álgebra

1. **(V́ctor & Joaquín)** Sea a, b las raíces de $x^2 + x = 5$, y sean $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que $c_0 + c_1a + \dots + c_na^n = 2025$ y $c_0 + c_1b + \dots + c_nb^n = 2025$. Pruebe que $c_0 + \dots + c_n \equiv 0 \pmod{3}$. Definimos $\mathcal{T} = \{\sum_{i=0}^n c_i \mid c_0 + \dots + c_na^n = 2025\}$, $s_{\min} = \min \mathcal{T}$, y $\mathcal{S} = \{c_i \mid \sum_{i=0}^n c_i = s_{\min}\}$. Demuestre que $\forall c_i \in \mathcal{S}, c_i < 5$.
2. **(IMO 1992)** Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para todos $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

3. **(USAJMO 2012)** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Demuestra que:

$$\frac{a^3 + 3b^3}{5a + b} + \frac{b^3 + 3c^3}{5b + c} + \frac{c^3 + 3a^3}{5c + a} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

4. **(Jovan K's Notes)** Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subsetneq \mathbb{R}^+$ con $a_{n+1} = a_1$. Demuestre que

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \leq \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{a_i^2}{a_{i+1}}\right).$$

Teoría de números

1. **(Sierpiński–Erdős–Surányi)**

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \exists^\infty m \in \mathbb{N}, \exists (\varepsilon_i)_{i=1}^m \in \{\pm 1\}^m : k = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i i^2?$$

Nota: El enunciado viene a decir que podemos representar todo $k \in \mathbb{Z}$ como $\pm 1^2 \dots \pm m^2$ para infinitos $m \in \mathbb{N}$ con sus elecciones de signo. Así es más *easy* de entender ;)

2. **(Argentina Iberoamerican TST 2009)** Encuentra todos los pares de enteros positivos (x, y) tales que la siguiente expresión es un número primo.

$$\frac{y^2x}{x+y}$$

3. **(ITAMO 2019)** Sean p, q ńmeros primos. Demuestre que si $p + q^2$ es un cuadrado perfecto, entonces $p^2 + q^n$ no es un cuadrado perfecto para ninǵn entero positivo n .
4. **(IMO 2025)** Se dice que una funci3n $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es *bonza* si para todo par de enteros positivos a, b se cumple:

$$f(a) \mid b^a - f(b)^{f(a)}.$$

Determina la constante real ḿs peque na c tal que $f(n) \leq cn$ para todas las funciones bonza f y todos los enteros positivos n .

Combinatoria

1. **(India TST 2004)** El *juego de las piedritas* funciona aś: al principio hay una sola piedrita en la casilla $(0, 0)$. En cada turno puedes quitar una piedrita que est3 en la posici3n (i, j) y colocar una nueva en $(i + 1, j)$ y otra en $(i, j + 1)$.

Solo puedes hacer el movimiento si en (i, j) hab́a efectivamente una piedrita y las casillas $(i + 1, j)$ y $(i, j + 1)$ est́n vacías.

Demuestra que, sin importar c3mo avance el juego, siempre habrá al menos una piedrita en alguna posici3n (a, b) que cumpla

$$a + b \leq 3.$$

2. **(USA TST 2002)** Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y sea S un conjunto tal que $|S| = 2^n + 1$. Sea $f : S \times S \rightarrow \{0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$. Se sabe que para cualesquiera $x, y, z \in S$, uno de los valores $f(\{x, y\})$, $f(\{y, z\})$, $f(\{z, x\})$ es igual a la suma de los otros dos. Demostrar que existen $a, b, c \in S$ tales que

$$f(\{a, b\}) = f(\{b, c\}) = f(\{c, a\}) = 0.$$

Nota: $S \times S = \{(x, y) \mid x, y \in S\}$ denota el **producto cartesiano**.

3. **(Canada 2004)** Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los divisores enteros positivos de 2004^{100} . ¿Cuál es el ńmero ḿximo posible de elementos que un subconjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ puede tener, si ninǵn elemento de $\mathcal{S}$ es ḿltiplo entero de otro elemento de $\mathcal{S}$?
4. **(Italia 1999)** Mar y V́ctor juegan el siguiente juego: hay 1999 bolas sobre una mesa. Los jugadores toman turnos para retirar algunas bolas (Mar empieza). La única restricci3n es que cada jugador debe tomar al menos una bola y como ḿximo la mitad de las bolas disponibles. Un jugador que deje solo una bola en la mesa **pierde** el juego. ¿Qui3n tiene estrategia ganadora?