

clase de combinatoria

28 noviembre 2025

Problema 1. Sea $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ un conjunto con $|A| = n + 1$ elementos. Demuestra que existen dos números en A tales que uno divide al otro.

Problema 2. Demuestra que en toda secuencia de $mn + 1$ números reales distintos existe o bien una subsecuencia ascendente de longitud $m + 1$ o bien una subsecuencia descendente de longitud $n + 1$, o ambas.

Problema 3 (OME 2020, P3). A cada punto del conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3\}$, formado por los puntos del espacio tridimensional cuyas coordenadas son enteras, le asignamos un color de entre p colores posibles. Demuestra que forzosamente existe algún paralelepípedo recto (poliedro de seis caras en el que cada cara es un rectángulo) cuyos vértices pertenecen a A y son todos del mismo color.

Problema 4 (Lema de Sperner). Un triángulo grande con vértices V_R , V_G , V_B es triangulado (es decir, se descompone en una cantidad finita de triángulos más pequeños tales que teselan el grande). Cada uno de los vértices de esta triangulación se colorea de rojo, verde o azul, de forma que el vértice V_R se colorea de rojo, el V_G de verde, el V_B de azul, y todos los vértices de un lado del triángulo grande se colorean de uno de los dos colores en los vértices de ese lado. Demuestra que existe un triángulo pequeño tricolor, es decir, cuyos vértices son de 3 colores distintos.

Problema 5. Demuestra que para todo poliedro convexo con V vértices, A aristas y C caras, $V - A + C = 2$.

Problema 6. Demuestra que el número de árboles etiquetados con n nodos es n^{n-2} . ¿Cuántos árboles etiquetados enraizados con n nodos hay?

Problema 7. Demuestra que para todo entero $n \geq 1$ hay la misma cantidad de:

- Funciones $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ débilmente crecientes con $f(x) \leq x$.
- Caminos crecientes en un retículo cuadrado $n \times n$ entre el $(0, 0)$ y el (n, n) que están siempre por debajo de la diagonal (cada paso incrementa una coordenada en una unidad).
- Formas de agrupar n pares de paréntesis (todo par primero se abre y luego se cierra).
- Árboles enraizados aplanados (los hijos de cada nodo están ordenados) binarios completos (cada nodo tiene 0 o 2 hijos) con $n + 1$ hojas.
- Formas de triangular un polígono convexo con $n + 2$ vértices etiquetados.