

Geometría I

Atlas y Víctor

19 diciembre 2025

Problema 1. Sea ABC triángulo, I su incentro, I_A su A -excentro, M el punto medio de la altura desde A , D el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con BC y X el punto de tangencia con la circunferencia A -exinscrita con BC . Demostrar que I , M y X son colineales y que M , D I_A también.

Problema 2. Sea ABC un triángulo y P un punto interior tal que BC es tangente a los circuncírculos de ABP y ACP . Demuestra que AP es la mediana por A .

Problema 3 (Sharygin Geometry Olympiad 2021). Sean Ω y ω dos circunferencias tangentes interiormente en el punto A . Una cuerda BC de Ω es tangente a ω en el punto K . Sea O el centro de ω . Demuestra que la circunferencia circunscrita del triángulo BOC biseca al segmento AK .

Problema 4 (Irlanda 2016). En el triángulo ABC , con $AB \neq AC$, las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle ACB$ cortan a AC y AB en E y F , respectivamente, y se cortan en I . Si $EI = FI$, encuentre $\angle BAC$.

Problema 5. Sea P un punto en el interior ABC y X, Y, Z los pies de las cevianas que pasan por P sobre los lados. Sea X' la reflexión de X sobre el punto medio del lado en el que está y similarmente Y', Z' . Demostrar que las cevianas con pies X', Y', Z' son concurrentes.

Problema 6. El punto A se encuentra en el exterior de la circunferencia Γ de centro O ; los puntos de tangencia desde A a Γ son B y C ; sea BD un diámetro de Γ ; las rectas CD y AB se cortan en E y las rectas AD y OE se cortan en F . Calcula $\frac{|AF|}{|FD|}$.

Problema 7 (OME 2025). Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O y ortocentro H , verificando $AB < AC$. La recta tangente a la circunferencia circunscrita de ABC que pasa por A corta a BC en T . Sea X el punto medio de AH . Demuestra que $\angle ATX = \angle OTB$.

Problema 8. Sea $\triangle ABC$ acutángulo con $AB < AC$ y sea O el centro del circuncírculo ω . Sea D un punto de la recta BC tal que $\angle BAD = \angle CAO$. Sea E el segundo punto de intersección de ω con la recta AD . Si M, N y P son los puntos medios de BE, OD y AC , respectivamente, prueba que M, N y P son colineales.

Problema 9 (USAMO 2025). Sea H el ortocentro de un triángulo acutángulo $\triangle ABC$. Sean F el pie de la altura trazada desde C hacia AB , y P la reflexión de H respecto a la recta BC . Supongamos que la circunferencia circunscrita del $\triangle AFP$ intersecta a la recta BC en dos puntos distintos, X e Y . Demuestre que $CX = CY$.

Problema 10 (OMC 2025). Sean A y B dos puntos sobre un diámetro de una circunferencia ω a la misma distancia de su centro C . El radio de ω es R . Sean un punto P sobre AB tal que $PC \cdot R = AC^2$ y D el extremo del radio que contiene a P . Sea E, Q dos punto de ω tal que el arco DQ es el doble del arco DE . Demostrar que $AE \cdot BE = PQ \cdot R$.

Problema 11 (Trollcontest VIII). Sea Ω una circunferencia de centro O . Sean A, B y Γ los vértices de un triángulo con lados opuestas a cada punto δ, ε y ζ . Supongamos que los lados y los puntos no son polares entre si con respecto a Ω y O no está en ningún lado. Decimos que dos rectas son **esperpénticas** si el polo con respecto a Ω de una está en la otra. **1)** Demostrar que si un punto $\Pi \neq O$ y una recta λ sin O que no son polo-polar, entonces existe una única recta esperpéntica a λ a través de Π . **2)** Demuestra que las alturas esperpénticas (rectas esperpénticas que pasan por el vértice opuesto) convergen en un punto H (ortocentro esperpéntico).

Problema 12 (IMO Longlist 1980). Dos circunferencias C_1 y C_2 son tangentes externamente en P . La recta ℓ es tangente a C_2 en A y corta a C_1 en B y C , con B situado entre A y C . Demostrar que la recta PA es la bisectriz exterior del ángulo $\angle BPC$.