

Clase preparación Olimpiada Matemática

Laura García y Carmen Zuleta

Simulacro
9 enero 2026

Problema 0. $ABCD$ es un cudrilátero convexo verificando $AB > BC$, $CD = DA$ y $\angle ABD = \angle DBC$. Sea E el punto de la recta AB tal que $\angle DEB = 90^\circ$. Probar que $AE = \frac{AB-BC}{2}$.

Problema 1. Se colocan $2n + 1$ fichas, blancas y negras, en una fila ($n \geq 1$). Se dice que una ficha esta equilibrada si el número de fichas blancas a su izquierda, más el número de fichas negras a su derecha es n . Determina, razonadamente, si el número de fichas que estan equilibradas es par o impar.

Problema 2. Sean p y n enteros positivos, tales que p es primo, $n \geq p$ y $1 + np$ es un cuadrado perfecto. Probar que $n + 1$ es suma de p cuadrados perfectos no nulos.

Problema 3. sea $a_0, a_1, \dots$ una secuencia de números reales definida recursivamente por:

$$a_0 = -1, \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0$$

Probar que $a_n > 0 \forall n \geq 1$.

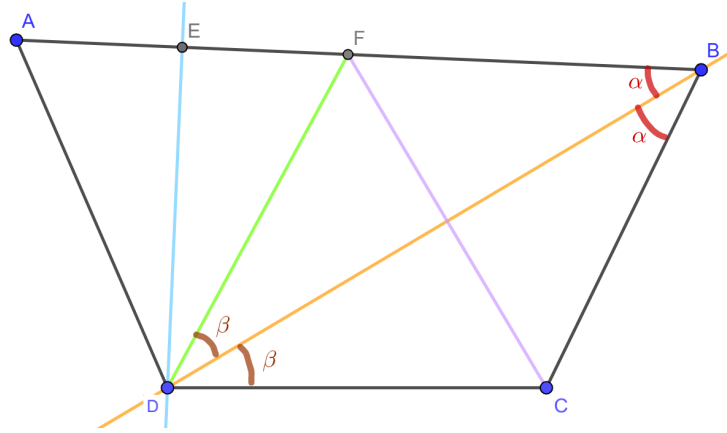
Problema 4. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ que satisfacen la siguiente ecuación para todo $x, y \in \mathbb{Q}^+$:

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy)$$

Soluciones

Problema 0. Fase local 2021. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo verificando $AB > BC$, $CD = DA$ y $\angle ABD = \angle DBC$. Sea E el punto de la recta AB tal que $\angle DEB = 90^\circ$. Probar que $AE = \frac{AB-BC}{2}$.

Solución. Veamos la siguiente figura: Sea $ABCD$ el cuadrilátero del enunciado. Sea F el



punto de corte del segmento AB con la mediatriz de BD . Por otro lado, sea E el punto de corte del segmento AF con su mediatriz.

Por construcción, se tienen las siguientes relaciones:

$$AD = DF = DC \qquad BF = BC \qquad AE = EF$$

Tenemos entonces que

$$AB = 2AE + BF = 2AE + BC \implies AE = \frac{AB - BC}{2}$$

Problema 1. Fase nacional 2018. Se colocan $2n + 1$ fichas, blancas y negras, en una fila ($n \geq 1$). Se dice que una ficha está equilibrada si el número de fichas blancas a su izquierda, más el número de fichas negras a su derecha es n . Determina, razonadamente, si el número de fichas que están equilibradas es par o impar.

Solución. Numeremos cada ficha de izquierda a derecha desde 1 a $2n + 1$. Definamos $f(k)$ como la suma del número de fichas blancas a la izquierda más el de negras a la derecha de la k -ésima, entonces será equilibrada si y solo si $f(k) = n$. Veamos los posibles casos al trasponer fichas contiguas:

Si k y $k + 1$ distinto color entonces el número de fichas blancas en $1 \dots k - 1$ (la izquierda) y de negras en $k + 2 \dots 2n + 1$ (la derecha) es el mismo para ambas. Si k es negra y $k + 1$ es blanca, $f(k) = f(k + 1)$; ya que ni el color de k suma a $f(k + 1)$, ni el de $k + 1$ suma a

$f(k)$. Si k es blanca y $k + 1$ es negra, k tiene una ficha negra adicional a la derecha ($k + 1$) y $k + 1$ tiene una ficha blanca adicional a la izquierda (k), es decir, $f(k) = f(k + 1)$. Por tanto, al permutarlas, la paridad del número de fichas equivalentes no variará (o $f(k)$ y $f(k + 1)$ permanecen iguales, o varían los dos). Si k y $k + 1$ son del mismo color, claramente la paridad del número de fichas equivalentes no variará.

Y como toda permutación se puede descomponer en trasposiciones, es suficiente estudiar los casos con todas las fichas blancas agrupadas en la izquierda y todas las negras agrupadas a la derecha:

Si a es el número de fichas blancas y b el de negras ($a + b = 2n + 1$) entonces o $a \leq n$ y $b \geq n + 1$ o viceversa, podemos asumir el primer caso, ya que el segundo es simétrico. Entonces $f(1) = b > n$ y $f(2n + 1) = a \leq n$. Observemos que $f(k + 1) = f(k)$ o $f(k + 1) = f(k) + 1$, ya que, si k y $k + 1$ son blancos, $f(k) = f(k + 1) - 1$; si k es blanco y $k + 1$ es negro, $f(k) = f(k + 1)$; y si k y $k + 1$ son negros, $f(k) = f(k + 1) - 1$. Por tanto, como f varía de uno en uno, $\exists k$ tal que $a \leq f(k) = n < b$

Problema 2. Fase nacional 2015. Sean p y n enteros positivos, tales que p es primo, $n \geq p$ y $1 + np$ es un cuadrado perfecto. Probar que $n + 1$ es suma de p cuadrados perfectos no nulos.

Solución. Sea $1 + np = k^2$, con k entero positivo. Entonces $np = k^2 - 1 = (k + 1)(k - 1)$. Ahora consideramos dos casos:

1. Si el primo p divide a $k - 1$, entonces $k - 1 = pl$ y $k = pl + 1$, con l entero positivo. Por tanto,

$$1 + np = k^2 = (pl + 1)^2 = p^2l^2 + 2pl + 1 \iff np = p^2l^2 + 2pl \iff n = pl^2 + 2l.$$

Entonces, $n + 1 = pl^2 + 2l + 1 = (p - 1)l^2 + (l + 1)^2$ como queríamos probar.

2. Si el primo p divide a $k + 1$, entonces $k + 1 = pl$ y $k = pl - 1$, con $l > 1$ entero ($l = 1$ se corresponde con el caso $n = p - 2$, que no es posible). Por tanto

$$1 + np = k^2 = (pl - 1)^2 = p^2l^2 - 2pl + 1 \iff np = p^2l^2 - 2pl \iff n = pl^2 - 2l.$$

Entonces, $n + 1 = pl^2 - 2l + 1 = (p - 1)l^2 + (l - 1)^2$ es suma de p cuadrados perfectos.

Problema 3. IMO Shortlist 2006/Olimpiada Matemática Polaca 2007 sea $a_0, a_1, \dots$ una secuencia de números reales definida recursivamente por:

$$a_0 = -1, \quad \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0$$

Probar que $a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$.

Solución. Por inducción. Para el caso base $n = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$.

Asumamos que $a_1, \dots, a_{n-1}$ son positivos, observemos que $a_n > 0$ si y solo si $\sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k+1} < 0$. Entonces:

$$-\frac{a_0}{n+1} = \frac{n}{n+1} \left(-\frac{a_0}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a_{n-k-1}}{k+1} > \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k+1}{k+2} \frac{a_{n-k-1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a_{n-k-1}}{k+2}$$

Por tanto:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k+1} = \frac{a_0}{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{k+1} = \frac{a_0}{n+1} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a_{n-k-1}}{k+2} < \frac{a_0}{n+1} - \frac{a_0}{n+1} = 0$$

Problema 4. IMO Shortlist 2010 Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ que satisfacen la siguiente ecuación para todo $x, y \in \mathbb{Q}^+$:

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy) \quad (1)$$

Solución. Sustituyendo $y = 1$, tenemos

$$f(f(x)^2) = x^3 f(x). \quad (2)$$

Por lo que si $f(x) = f(y)$, entonces

$$x^3 = \frac{f(f(x)^2)}{f(x)} = \frac{f(f(y)^2)}{f(y)} = y^3$$

lo cual implica que $x = y$, y por tanto la función f es inyectiva.

Si ahora sustituimos X por xy en 2, aplicando 1 dos veces, la segunda vez a $(y, f(x)^2)$ en vez de a (x, y) :

$$f(f(xy)^2) = (xy)^3 f(xy) = y^3 f(f(x)^2 y) = f(f(x)^2 f(y)^2).$$

Como f es inyectiva, llegamos a que

$$f(xy)^2 = f(x)^2 f(y)^2 \implies f(xy) = f(x)f(y).$$

Luego f es multiplicativa. Esto también implica que $f(1) = 1$ y que $f(x^n) = f(x)^n$ para todo entero n . Por lo que la ecuación 1 puede reescribirse como

$$f(f(x))^2 f(y) = x^3 f(x)f(y) \implies f(f(x)) = \sqrt{x^3 f(x)}. \quad (3)$$

Sea $g(x) = xf(x)$. Entonces, por la ecuación 3, se tiene que

$$g(g(x)) = g(xf(x)) = xf(x) \cdot f(xf(x)) = xf(x)^2 f(f(x)) = xf(x)^2 \sqrt{x^3 f(x)} = (xf(x))^{5/2} = (g(x))^{5/2},$$

y, por inducción,

$$g(g(\dots^{(n+1)} g(x) \dots)) = (g(x))^{(5/2)^n}$$

para todo entero positivo n .

Fijado un x , el lado izquierdo es siempre racional, por lo que $g(x)^{(5/2)^n}$ es racional para todo n . Veamos que entonces $g(x) = 1$. Si no fuese así, $g(x) = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ con p_i primos y α_i enteros no nulos. Por tanto:

$$g(x)^{(5/2)^n} = p_1^{(\frac{5}{2})^n \alpha_1} \dots p_k^{(\frac{5}{2})^n \alpha_k}$$

Pero si n es suficientemente grande $(\frac{5}{2})^n \alpha_i$ no es un entero y $g(x)^{(5/2)^n}$ no es racional. Por tanto $g(x) \equiv 1$ y $f(x) = \frac{1}{x} \forall x$.

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ satisface la ecuación 1:

$$f(f(x)^2 y) = \frac{1}{f(x)^2 y} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 y} = \frac{x^3}{xy} = x^3 f(xy).$$