Enseñar constantes con transformaciones: enfoque Hamiltoniano de las constantes de movimiento
Teaching constants with transformations: Hamiltonian approach to constants of motion

Física

CARLOS ALBERTO PLATA RAMOS
ORCID: 0000-0002-4116-6854
Universidad de Sevilla. Departamento de Física Atómica Molecular y Nuclear
cplata1@us.es

Resumen. En este trabajo, se presenta el diseño, aplicación y evaluación de un Ciclo de Mejora en el Aula en la asignatura de Mecánica Teórica impartida simultáneamente en las titulaciones del Grado en Física, Doble Grado en Física y Matemáticas y Doble Grado en Física e Ingeniería de Materiales. El contenido a desarrollar es el formalismo hamiltoniano como herramienta del estudio de los sistemas mecánicas con una especial atención a las magnitudes conservadas y a la invarianza frente a transformaciones canónicas. En el aula, se ha trabajado en torno a dos problemas vertebradores del contenido y se han utilizado actividades que fomentan la participación directa y activa del estudiante, incluyendo: trabajo personal y/o en pequeños grupos con puesta en común, resolución de problemas en la pizarra por parte del alumno, visionado y discusión de simulaciones en software matemático.

Palabras claves: Mecánica teórica, grado en física, docencia universitaria, desarrollo profesional docente.

Abstract. This work puts forward the design, application, and evaluation of an improvement cycle in classroom for the subject Analytical Mechanics, simultaneously taught in the Physics Degree, Physics and Mathematics Double Degree, Physics and Material Engineering Double Degree. The main content is the Hamiltonian formalism used to study mechanical systems with a special focus on constants of motion and the invariance when applying canonical transformations. In the classroom, two main problems have become in the structuring elements of the whole learning experience. Activities to encourage active participation of the students have been designed and employed, including working individually and/or in small groups with a sharing final phase, solving problems on the blackboard by the students, watching and discussion of simulations in mathematical software.

Keywords: Analytical mechanics, physics degree, university teaching, teaching professional development.

Introducción

En esta sección, se contextualiza brevemente la asignatura donde se ha aplicado el Ciclo de Mejora en el Aula (CIMA) (Delord, Hamed y otros, 2020). Esta asignatura es *Mecánica Teórica*, la cual se imparte simultáneamente en el Grado en Física (en tercer curso), en el Doble Grado en Física y Matemáticas (en cuarto curso) y en el Doble Grado en Física e Ingeniería de Materiales (en tercer curso) de la Universidad de Sevilla. Es una asignatura cuatrimestral de 6 créditos donde se estudia el enfoque más formal de la mecánica y sus leyes. Hay 65 matriculados, de los cuales en torno a 20 son repetidores y la asistencia fluctúa alrededor de 40. Las clases son, salvo en excepciones, de 1 hora de duración. Mecánica Teórica es una asignatura avanzada dentro del plan de estudios de todas las titulaciones donde se imparte. Esto es relevante desde el punto de vista de la madurez e interés por el campo disciplinar por parte de los alumnos, que, en términos generales, están cursando la asignatura con motivación y ganas de aprender. Dicho interés y madurez permite explorar enfoques formales no tan asequibles en niveles inferiores, en mi opinión, bien representados por los libros de Landau y Lifshitz (1994) o Lanczos (1986).

Diseño previo del CIMA

Mapa de contenidos

El mapa de contenidos, presentado en la Figura 1, sitúa en primer lugar un contexto global de la asignatura, donde el objetivo último es resolver el problema de *cómo se mueven las cosas*. Tenemos diferentes formulaciones: la formulación lagrangiana, la hamiltoniana y el formalismo de Hamilton-Jacobi.

En particular, el ciclo de mejora propuesto se desarrolla para el aprendizaje del estudio de las propiedades del movimiento de los sistemas mecánicos desde el prisma del formalismo hamiltoniano. Todos los contenidos surgirán de la necesidad de resolver los dos problemas que planteamos, los cuales actuarán como elementos vertebradores del contenido: 1) *¿Cuáles son las leyes de conservación?* y 2) *¿Qué trasformaciones dejan invariante las leyes de la mecánica?*

La resolución de ambos problemas nos ayudará a ahondar en la estrecha relación entre simetrías y leyes de conservación en la física, un concepto fundamental que ha impulsado el avance de la física teórica moderna. Los problemas con casos ilustrativos de sistemas físicos reales nos servirán para materializar el formalismo en aplicación, mejorando las destrezas e intuiciones sobre los sistemas mecánicos cotidianos.

Se ha señalado la naturaleza principal de los contenidos conceptuales y procedimentales en el mapa. Pese a no estar incluidos explícitamente, existen contenidos actitudinales generales que son tratados de forma transversal a lo largo de la asignatura. Estos son:

- Mantener un pensamiento crítico y científico.
- Valorar los avances científicos y el papel de las personas en su desarrollo. Valorar que dichos avances son producidos en ocasiones por individuos inspiradores, pero mucho más a menudo por una comunidad que trabaja en estrecha colaboración.
- Conservar una actitud honesta en el trabajo, reconociendo el mérito propio y ajeno.

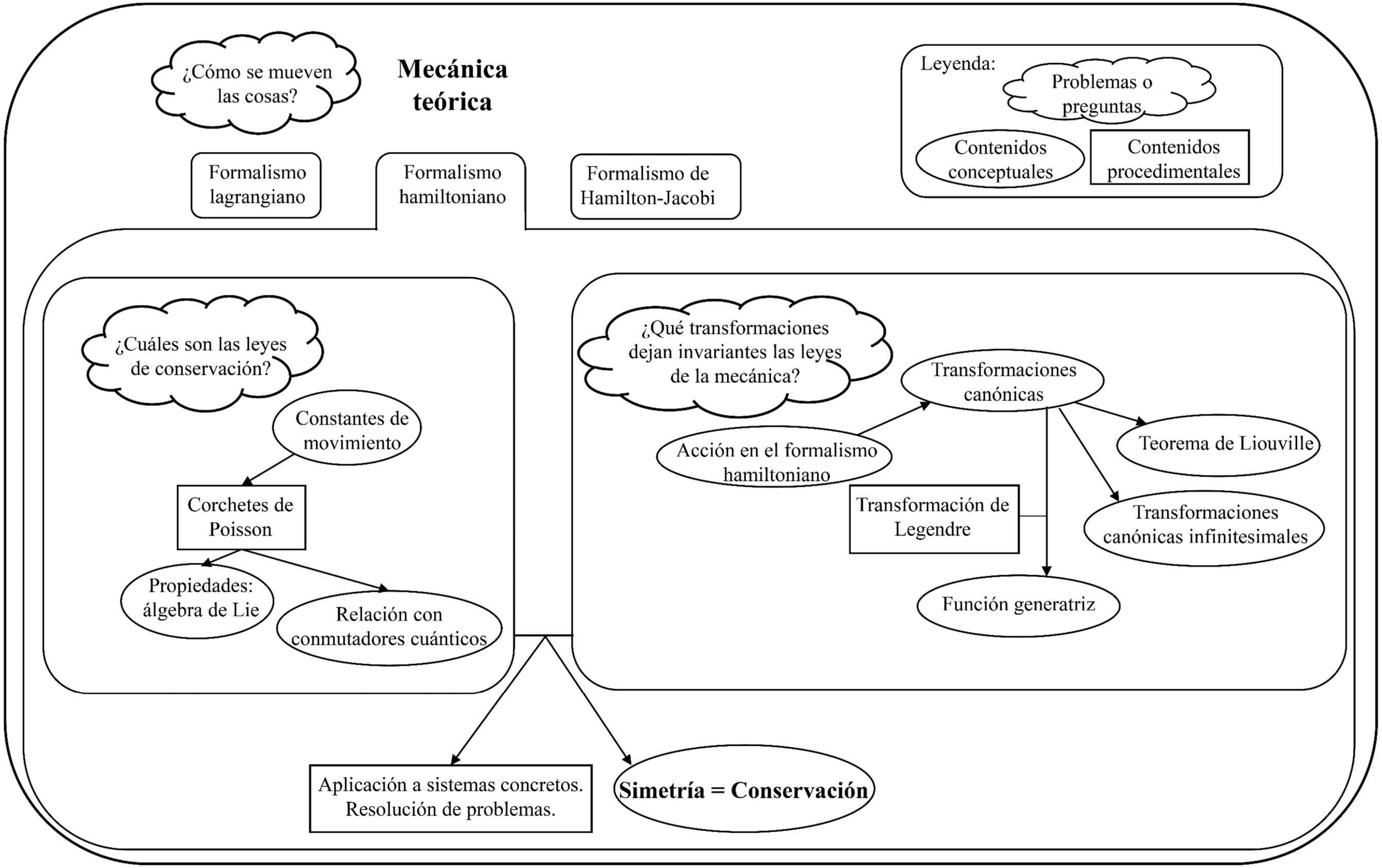

Figura 1. Mapa de contenidos

Modelo metodológico posible

Para la asignatura de mecánica teórica, al igual que para un amplio espectro de materias de áreas científico-técnicas, creo que existen dos tipos de sesiones bastante diferentes: sesiones más centradas en la teoría y sesiones más centradas en la resolución de problemas. A continuación, en la Figura 2, se detalla un modelo metodológico posible de cada tipo. Estos diseños están en parte basados en una visión constructivista del conocimiento a través del proceso investigativo (Bain, 2007). A pesar de las diferencias entre los dos tipos de sesiones, ambos tienen propiedades estructurales comunes. Comienzan con una introducción (I), conectando con la sesión anterior. En la fase de introducción puede aprovecharse para introducir el problema (Pr) al que se intentará dar respuesta durante la sesión. Especialmente en el contexto de la teoría, conviene motivar al alumno y conducirlo al planteamiento del problema. Queremos que este sea un sujeto activo con la curiosidad de resolver el problema (Finkel, 2008). Para ello, usaremos y partiremos de sus ideas (IA). En las clases de resolución de problemas, los problemas suelen estar definidos por el profesor para maximizar el aprendizaje práctico de aplicar los conocimientos teóricos ya impartidos. A continuación, se entra en el bloque central donde la teoría (o la resolución práctica de problemas) se desarrolla. Esta parte central debe estar focalizada en el alumno y por tanto necesitamos un feedback iterativo (tantas iteraciones como sean necesarias) con el mismo. En las clases de resolución de problemas, puede surgir la necesidad de refrescar o introducir algún contenido teórico dentro del bucle de iteración. En la parte central es donde se dan a su vez *las actividades de contraste*. En este CIMA, principalmente usaremos las siguientes actividades de contraste: *explicaciones teóricas en la pizarra con interacción continua con el alumnado, resolución por parte del alumno o del profesor de problemas propuesto* y *discusión sobre simulaciones de ordenador que ilustran propiedades de interés de los contenidos relativos a la experiencia de aprendizaje*. Por último, conviene cerrar la sesión con una pequeña fase de síntesis (S), dudas y comentarios. Asimismo, afianzamos el mensaje para llevar a casa ¿qué se ha aprendido y cuál será el siguiente paso?

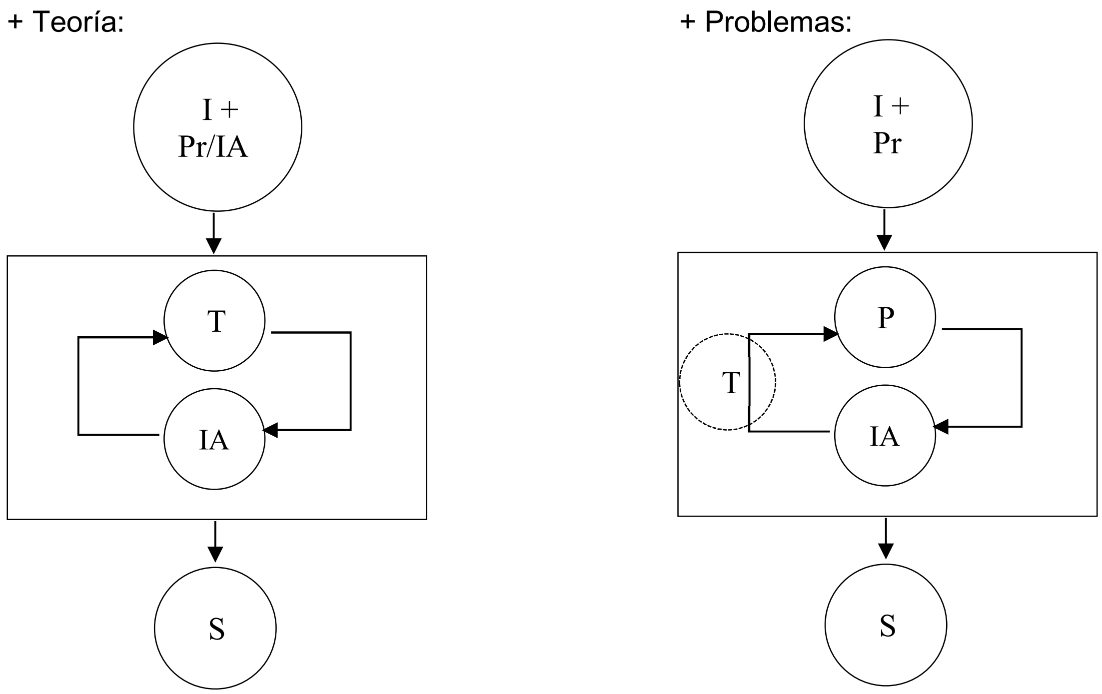

Figura 2. Esquema del modelo metodológico posible

Secuenciación de actividades

A continuación, describimos las actividades planificadas en el CIMA, que se han estructurado siguiendo los principios de De Alba y Porlán (2017) con una intención transformadora sobre los modelos mentales de los estudiantes. Con propósitos sintéticos, presentamos esta información en la Tabla 1.

Tabla 1. Secuenciación de actividades planificadas para el CIMA completo

Sesión 1 (1 h)		
Actividad 1.1	*Cuestionario*	20 min
Se dejará un tiempo razonable para afrontar el cuestionario de conocimientos previos que se volverá a pasar al final del ciclo de mejora.		
Actividad 1.2	*Introducción del problema: constantes de movimiento (I/Pr)*	10 min
Después de haber estudiado las constantes de movimiento desde el prisma del formalismo lagrangiano en temas anteriores, estudiaremos las propiedades de las ecuaciones de movimiento inferidas desde la óptica del formalismo hamiltoniano. Comenzaremos por intentar caracterizar las constantes de movimiento desde el punto de vista de la formulación hamiltoniana. Los estudiantes de física, a estas alturas, son conscientes de la relevancia de las constantes de movimiento en esta disciplina. Por ello, el problema les es cercano e interesante.		
Actividad 1.3	*Explicación con interacción: Corchetes de Poisson, condición de constante de movimiento (T/IA)*	20 min
Partiendo de pilares comunes, las variables naturales en el formalismo hamiltoniano, y con participación del alumno, derivaremos la condición de constante de movimiento. Esto nos llevará a la introducción de los corchetes de Poisson.		
Actividad 1.4	*Conclusiones / dudas / comentarios (S)*	10 min
En la fase final, extraeremos conclusiones, resolveremos dudas y generaremos comentarios sobre nuestro estado en el proceso de aprendizaje, así como sobre los pasos y objetivos próximos. Así procederemos en todas los finales de sesiones salvo que se diga lo contrario.		
Sesión 2 (1 h)		
Actividad 2.1	*Reconexión con la clase anterior (I)*	15 min
Partir de una base sólida es fundamental, por lo que reconectaremos con los resultados de la clase anterior, resolviendo posibles dudas que hayan surgido. Así procederemos de forma general salvo que se diga lo contrario al inicio de las sesiones.		
Actividad 2.2	*Explicación con interacción: Propiedades del álgebra de Lie y los corchetes de Poisson (T/P/IA)*	30 min
Los corchetes de Poisson, definidos por su utilidad en el contexto de las constantes de movimiento, poseen unas propiedades interesantes. Esto nos ayuda a definir qué es un álgebra de Lie. Dejaremos pequeños intervalos de tiempo para que de forma individual o en pequeños grupos, los alumnos vayan demostrando las propiedades que se enuncian. Al final de estos intervalos, haremos una puesta en común de contraste.		
Actividad 2.3	*Explicación con interacción: Conexión con operaciones conocidas y por conocer (T/IA)*	10 min
Pese a que normalmente no son conscientes, no es la primera vez que los estudiantes usan un álgebra de Lie. Es el caso del producto vectorial, operación que ya conocen y manejan bien. También es el caso, de los conmutadores, herramienta fundamental en el contexto de la mecánica cuántica y que pronto empezarán a utilizar. Aprovecharemos para interconectar estos conocimientos		
Actividad 2.4	*Conclusiones / dudas / comentarios (S)*	15 min
Sesión 3 (1h)		
Actividad 3.1	*Reconexión con la clase anterior (I)*	10 min

<table>
<tr><td>Actividad 3.2</td><td>Planteamiento del nuevo problema: transformaciones que dejan invariante las ecuaciones canónicas (Pr/T/IA)</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">El segundo problema sobre el que se vertebra los contenidos que desarrollamos con este CIMA es de gran importancia en el desarrollo de la física. Los estudiantes están ya familiarizados sobre la relevancia de la invarianza de las leyes de la física (las leyes de la física no son diferentes en Sevilla o Nueva York, ni si quiera son diferentes en la Tierra o en Marte). Por ello, es importante conocer cuáles son las transformaciones (cambio de variables) que dejan invariantes las leyes físicas. En particular, el formalismo hamiltoniano (que usa un conjunto más amplio de variables) tiene mayor libertad a la hora de definir transformaciones. Por este motivo, es importante discernir qué transformaciones dejan invariantes las ecuaciones de Hamilton y qué información podemos obtener de estas transformaciones. ¿Serán únicas? ¿Cómo podremos generarlas? Todas estas preguntas suscitarán el interés del alumno medio de física, enganchando su atención. Este enfoque facilita al alumno una contextualización motivadora, en contraposición con una alternativa donde las transformaciones canónicas se definen sin ningún propósito aparente.</td></tr>
<tr><td>Actividad 3.3</td><td>Explicación con interacción: Transformaciones canónicas y funciones generatrices (T/IA)</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">Introduciremos las funciones generatrices. Tras construir la función generatriz básica, plantearemos que pueden existir otros tipos. Buscaremos la complicidad del alumnado para ver cómo podemos llegar a esos otros tipos de función generatriz. Lo haremos recordando la transformada de Legendre (introducida en un momento anterior en el curso). Generaremos una dinámica de grupo donde los alumnos, de forma individual o en pequeños grupos, podrán generar su tipo preferido de función generatriz. Introduciremos algunos ejemplos de transformación canónica especialmente relevantes: la identidad, intercambio de coordenadas y momentos, y la evolución temporal.</td></tr>
<tr><td>Actividad 3.4</td><td>Conclusiones / dudas / comentarios (S)</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Sesión 4 (1h)</td></tr>
<tr><td>Actividad 4.1</td><td>Reconexión con los resultados de teoría (I)</td><td>5 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">En esta sesión resolveremos problemas relativos a constantes de movimiento en el formalismo hamiltoniano y los corchetes de Poisson</td></tr>
<tr><td>Actividad 4.2</td><td>Resolución de problemas planteados de antemano en la pizarra por parte de los alumnos (P/IA)</td><td>25 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">Los boletines de problemas han sido entregados a principio del tema, marcando los problemas que se proponen para resolver en la pizarra por parte del alumno, suponiendo una puntuación extra, parte de la evaluación continua. Estos problemas han sido seleccionados como ejercicios que supongan un desafío (no sean triviales) siendo de una dificultad similar a la que cabría esperar en un examen de la asignatura (deben ser abordables con los contenidos vistos en clase sin necesidad de una idea feliz).</td></tr>
<tr><td>Actividad 4.3</td><td>Resolución de problemas en la pizarra por parte del profesor con interacción del alumnado (P/IA)</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">Los problemas resueltos por el profesor son tanto ilustraciones casi triviales de la teoría como aquellos problemas que necesitan de un desarrollo más fino en ocasiones con la necesidad de alguna idea feliz. En muchas ocasiones, estas ideas felices son difíciles de que se te ocurran en una primera ocasión, pero son reutilizables en problemas similares, por lo que son un aprendizaje interesante que trasciende a lo anecdótico.</td></tr>
<tr><td>Actividad 4.4</td><td>Conclusiones / dudas / comentarios (S)</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Sesión 5 (1h 30 min)</td></tr>
<tr><td>Actividad 5.1</td><td>Reconexión con la clase anterior (I)</td><td>15 min</td></tr>
<tr><td>Actividad 5.2</td><td>Explicación con interacción: Conservación del volumen fásico (T/IA)</td><td>30 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">El uso del espacio de las fases, es algo que los alumnos han visto en asignaturas más elementales de mecánica y física general. En cualquier caso, conviene revisualizar con ellos la utilidad del espacio fásico. Una vez recordado, nos plantearemos la pregunta ¿cómo cambia el volumen fásico ante una transformación canónica? La transformación nos llevará a que el volumen</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">físico es invariante frente a transformaciones canónicas. En particular, aplicado para la transformación evolución temporal, la conservación del volumen fásico, se denomina teorema de Liouville. Dicho teorema es una un principio fundamental no sólo de la mecánica sino también de la física estadística, es una buena oportunidad para establecer puentes entre disciplinas y valorar cómo algo desarrollado en un contexto puede ser fundamental para otras ramas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 5.3</td><td>Ejemplos visualizados con Mathematica (T/P/IA)</td><td>30 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estudiaremos con los alumnos casos concretos (sencillos pero relevantes) del teorema de Liouville. Para una presentación atractiva, utilizaremos el software Mathematica. Iremos comentando de forma participativa cómo esperan que se comporte cada sistema e iremos realizando las simulaciones en el ordenador, constatando nuestras intuiciones y comprobando que el teorema de Liouville se verifica siempre.</td></tr>
<tr><td>Actividad 5.4</td><td>Conclusiones / dudas / comentarios (S)</td><td>15 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">Sesión 6 (1h 30 min)</td></tr>
<tr><td>Actividad 6.1</td><td>Reconexión con la clase anterior (I)</td><td>15 min</td></tr>
<tr><td>Actividad 6.2</td><td>Explicación con interacción: Transformaciones infinitesimales (T/IA)</td><td>30 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">Introduciremos el concepto de transformación canónica infinitesimal partiendo de un cambio infinitesimal de la transformación identidad (vista ya como ejemplo en la sesión 3). Ello nos llevará a la definición del generador de una transformación infinitesimal (objeto equivalente a la función generatriz de las transformaciones finitas). Estudiaremos las relaciones entre las variables transformadas y el nuevo hamiltoniano.</td></tr>
<tr><td>Actividad 6.3</td><td>Explicación con interacción: Ejemplos de transformaciones canónicas infinitesimales (T/P/IA)</td><td>15 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">Utilizaremos como generador, diferentes magnitudes físicas de interés: el momento lineal, el propio hamiltoniano. Propondremos y daremos un pequeño tiempo para que los alumnos, aplicando las reglas de transformación introducidas en la explicación anterior, deriven qué transformaciones se generan.</td></tr>
<tr><td>Actividad 6.4</td><td>Explicación con interacción: Conexión simetrías y conservaciones (T/IA)</td><td>15 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">Viendo las condiciones de invarianza del hamiltoniano, conseguiremos reconectar con la estrecha relación entre simetría y conservación (ya estudiada en el tema anterior a través del teorema de Noether).</td></tr>
<tr><td>Actividad 6.5</td><td>Conclusiones / dudas / comentarios (S)</td><td>15 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">Sesión 7 (1h)</td></tr>
<tr><td>Actividad 7.1</td><td>Reconexión con los resultados de teoría (I)</td><td>5 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">En esta sesión resolveremos problemas relativos a transformaciones canónicas y el teorema de Liouville. Las actividades sucesivas son análogas a las propuestas en la sesión 4.</td></tr>
<tr><td>Actividad 7.2</td><td>Resolución de problemas planteados de antemano en la pizarra por parte de los alumnos (P/IA)</td><td>25 min</td></tr>
<tr><td>Actividad 7.3</td><td>Resolución de problemas en la pizarra por parte del profesor con interacción del alumnado (P/IA)</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td>Actividad 7.4</td><td>Conclusiones / dudas / comentarios (S)</td><td>10 min</td></tr>
</table>

Cuestionario inicial-final

Con la intención de evaluar los conocimientos sobre los contenidos trabajados en este CIMA, se pasó, tanto al inicio como al final del mismo, el siguiente cuestionario:

- *¿Cuáles son las variables naturales del formalismo hamiltoniano? Un observable genérico en dicho formalismo será una función que depende de dichas variables. Derivar la condición de que un observable sea constante de movimiento. ¿Puede escribirse dicha condición de forma compacta?*
- *¿Son las ecuaciones de Hamilton invariantes frente a cualquier transformación de las coordenadas y momentos generalizados del sistema? ¿Cómo generarías una*

transformación adecuada (que deja invariante las ecuaciones de Hamilton)? ¿Crees que será única o habrá más de una?
- *En el espacio de las fases, ¿qué define un conjunto de valores concretos para las coordenadas y momentos generalizados? Considérese que dicho conjunto representa una condición inicial para el sistema físico bajo estudio, ¿qué describe en el espacio de las fases la evolución temporal de dicho objeto? Considérese ahora un conjunto de configuraciones iniciales, ¿qué define en el espacio de las fases?, ¿tiene alguna intuición sobre alguna propiedad característica de su evolución?*

Las preguntas han sido diseñadas premeditadamente de forma cualitativa, ya que pretendemos registrar el conocimiento de conceptos y su interrelación, y no tanto un manejo técnico del mismo.

Aplicación del CIMA

Relato resumido de las sesiones

En términos generales, la implementación del CIMA se ha llevado a cabo sin grandes desviaciones sobre lo planificado. A continuación, se presenta un registro resumido de todas las sesiones.

Sesión 1 (1h). En la primera sesión se pasó el cuestionario. Insistí mucho en que el cuestionario no tenía valor alguno en la calificación y que se trataba de un método de evaluación de la experiencia de aprendizaje en sí, para comparar el antes y el después (el cuestionario final se pasó al inicio de la sesión siguiente a la última de este registro). Me pareció importante subrayar este hecho, ya que pude vislumbrar cierto nerviosismo. Evitar la frustración era relevante para no empezar con mal pie. El resto de la sesión transcurrió con bastante fluidez. El grupo en concreto tiene una implicación notable en las clases lo que permite la interacción deseada tanto en el planteamiento de los problemas como en las interacciones en las explicaciones.

Sesión 2 (1h). Algo que me ha dado una muy buena sensación a lo largo de todas las sesiones es el hecho de que los inicios y finales de sesión sean progresivos, iniciando con conexión a la clase anterior y finalizando con conclusiones sobre lo aprendido en el día y esbozando el futuro inmediato. La impresión que tengo es que esta sensación también la comparte el alumnado, acostumbrándose a implicarse más en la sesión. Intento que, incluso si hay problemas en la comprensión del cómo se están haciendo las cosas, porque por su complejidad técnica sea difícil de entenderse en el instante de la clase y precise de un estudio posterior, el qué estamos haciendo esté claro en todo momento. Siguiendo lo planificado, después de haber descrito las propiedades del álgebra de Lie, utilizamos algunas dinámicas donde los propios estudiantes demostraron propiedades enunciadas aplicando conocimientos previos. He encontrado, que el obligarles a ser sujetos activos, hace que estén más implicados de lo que estarían en una clase más tradicional donde se les trataría como sujetos pasivos. Una característica de esta sesión es también la conexión con otras disciplinas, lo que especialmente en carreras científicas resulta de un atractivo destacable para el alumno. Tomar consciencia de que lo que se aprende no solo es una particularidad del formalismo en mecánica clásica que se tiene entre manos, sino que es base para la formulación de la cuántica.

Sesión 3 (1h). En esta tercera sesión, dedicamos un tiempo considerable a la discusión del planteamiento del segundo problema que vertebra todos nuestros contenidos. El concepto de transformaciones que dejan invariante las leyes físicas es fundamental en toda la física y especialmente en la mecánica. Subrayar la importancia de este concepto ha ayudado a capturar la atención del alumno, que inicia a ser consciente sobre lo importante del contenido que está estudiando en la construcción de nuestra descripción del mundo físico. De nuevo, el utilizar dinámicas donde ellos mismos, individualmente o en grupo, tienen un tiempo corto para aplicar ideas ya discutidas que dan lugar a una teoría más completa, ayuda a aumentar el nivel de implicación en general.

Sesión 4 (1h). Las clases de resolución de problemas se utilizan para resolver problemas propuestos, que han sido entregados con anterioridad. Se incentiva a los alumnos que lleguen a clase con los problemas, al menos, intentados. En particular, comenzamos estas sesiones ofreciendo que salgan voluntarios a la pizarra para resolver algún problema frente a sus compañeros. En esta dinámica de salir a resolver a la pizarra, se fomenta que el alumno no sólo plasme la resolución, sino que se discuta, presentando las ideas que le llevan a tomar un cierto camino. Eso genera una discusión bastante enriquecedora para todos, ya salen a relucir dudas de todo tipo. También, los alumnos que no salen tienen la sensación de un cambio de aire y algunos se animan más a hacer preguntas a un compañero en vez de al profesor. Esta forma de trabajar, apoyado en la guía del profesor, me parece especialmente positiva en sesiones de resolución de problemas. En la segunda parte, es el profesor quien resuelve algunos problemas. Es muy importante la buena categorización de los problemas para ser resueltos por uno u otros, exprimiendo al máximo lo que podemos aprender de cada uno.

Sesión 5 (1h 30 min). Tanto esta sesión como la siguiente tienen una media hora adicional que recuperamos de unas sesiones que se perderán a la vuelta de Navidad. En una asignatura de intensidad intelectual notable, como es la mecánica teórica, la temporalización es importante. He notado como al pasar la primera hora, la aceptación de conceptos baja considerablemente. Por ello, me pareció importante dejar para el final, aplicaciones más visuales o repasos que hacen que la atracción que sienta el alumno compense su saturación mental. En esta sesión, después de derivar el teorema de Liouville, estuvimos utilizando el software Mathematica para ver una simulación de las trayectorias en el espacio de las fases seguidas por sistemas dinámicos paradigmáticos en física. Siento que la aceptación del uso de herramientas TIC, que materializa la teoría desarrollada, es muy buena por parte de los alumnos.

Sesión 6 (1h 30 min). En esta sesión, tal y como estaba planeado, se ha introducido una dinámica similar a las utilizada en la segunda y tercera, donde después de discutir e introducir conceptos, ellos mismos realizan aplicaciones de estos para completar la teoría. En esta sesión de hora y media, he sentido el cansancio de los alumnos en la parte final de forma más evidente que en la sesión anterior. La reconexión con la estrecha relación entre conservaciones y simetrías en física ha tenido una buena bienvenida por parte del alumnado pese al estar en la parte final de la clase donde, juntos, hemos extraído las conclusiones.

Sesión 7 (1h). Transcurre de forma bastante similar a la primera sesión de resolución (sesión 4).

Evaluación del aprendizaje de los estudiantes

Los cuestionarios han sido revisados en detalle. A partir de las respuestas de los alumnos, hemos elaborado una clasificación de las respuestas en función de su concreción y complejidad, que detallamos en la Tabla 2.

Tabla 2. Clasificación en niveles para las respuestas al cuestionario

Pregunta 1) Constantes de movimiento y corchetes de Poisson	
D	No responde o lo hace sin utilizar los conceptos físicos adecuados

C	Reconoce las variables naturales del formalismo hamiltoniano, pero confunde conceptos
B	Reconoce las variables naturales del formalismo hamiltoniano, tiene intuición sobre las constantes de movimiento y/o los corchetes de Poisson sin llegar a relacionarlos de forma precisa.
A	Reconoce las variables naturales del formalismo hamiltoniano, entiende cómo caracterizar una constante de movimiento en dicho formalismo y utiliza adecuadamente los corchetes de Poisson.
Pregunta 2) Transformaciones canónicas	
D	No responde o lo hace sin utilizar los conceptos físicos adecuados
C	Tiene cierta intuición de que existen las transformaciones canónicas, pero no es capaz de formalizarlo de forma rigurosa.
B	Maneja el concepto de transformación canónica y función generatriz, aunque no es capaz de precisar su relación.
A	Sabe qué es una transformación canónica, y cómo definirla caracterizarla mediante una función generatriz
Pregunta 3) Espacio de las fases y teorema de Liouville	
D	No responde o lo hace sin utilizar los conceptos físicos adecuados
C	Posee intuición de qué representan los estados y trayectorias dinámicas de un sistema mecánico en el espacio de las fases, aunque no es capaz de formularlo usando un lenguaje matemático adecuado.
B	Comprende de forma precisa la representación en el espacio de las fases y/o conoce el teorema de Liouville aunque no los relaciona de manera rigurosa.
A	Entiende qué es el espacio de las fases y sabe relacionar el volumen fásico encerrado en este con el teorema de Liouville.

Esta clasificación nos ha ayudado a analizar el progreso de los alumnos, que se presenta en las escaleras de aprendizaje (Rivero y Porlán, 2017) de la Figura 3, donde se especifica el porcentaje de alumnos en cada nivel antes y después del CIMA.

Los resultados, como se pueden observar, son positivos. La muestra estadística es de 26 alumnos, que son aquellos que estaban presentes los dos días que se pasó el cuestionario. Fijándonos en la evolución individual de cada alumno, cabe destacar que, sólo en la pregunta 2), hubo tres alumnos que bajaron su nivel. El resto de las evoluciones alumno/pregunta, en media, superaron entre uno y dos escalones en la escalera de aprendizaje.

Pese a los resultados positivos obtenidos, debo señalar que no estoy firmemente convencido de la herramienta del cuestionario para arrojar luz en el proceso de aprendizaje, cuando los contenidos desarrollados en este son bastante formales, como sucede en este CIMA, ya que los alumnos no tienen una familiaridad previa. En consecuencia, me parece que salvo en contadas ocasiones (o quizás en cuestionarios extraordinariamente bien planteados), el cuestionario describe un salto entre niveles de comprensión bajos a altos.

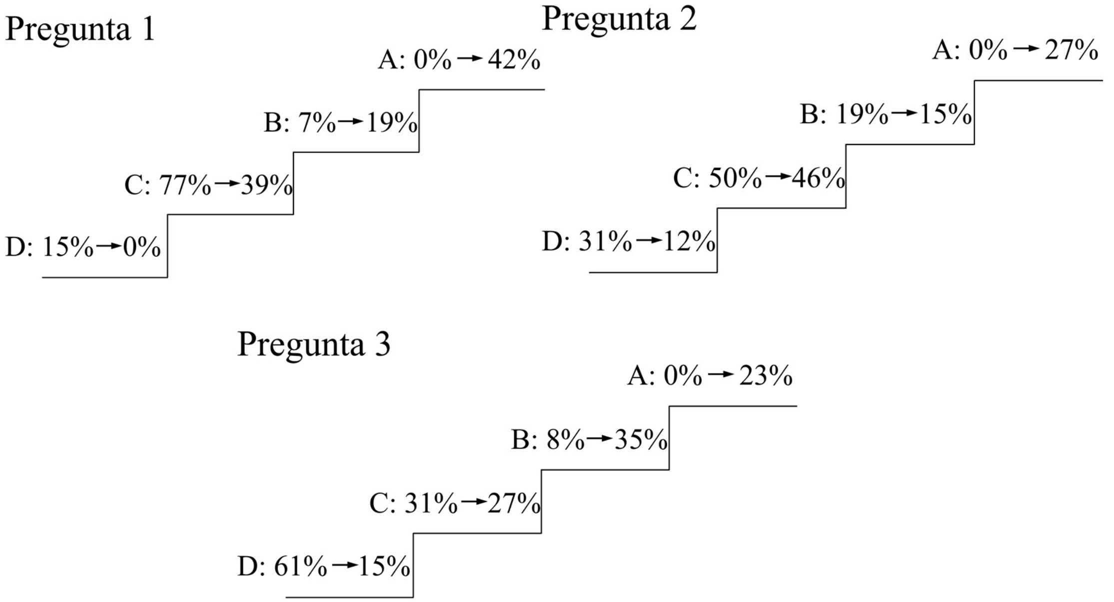

Figura 3. Comparativa del resultado de la escalera de aprendizaje para las tres preguntas del cuestionario antes y después del CIMA

Evaluación del CIMA

Aspectos a mantener o cambiar para un futuro CIMA

Me ha parecido muy destacable la utilidad de las dinámicas que ponen al alumno como sujeto activo en el proceso de aprendizaje, así como el uso de TIC como herramienta dinamizadora. También ha sido una muy buena experiencia la elaboración del mapa de contenidos y de los modelos metodológicos posibles, fruto de una reflexión profunda y consciente de la práctica docente. Me gustaría encontrar algún modo de mejorar el cuestionario o encontrar una herramienta que lo supla en la evaluación. Creo que sería de ayuda en contenidos disciplinares de carácter formal, donde el conocimiento intuitivo no cubre todo lo que desea evaluarse.

Aspectos a incorporar a la docencia habitual

Pienso incorporar a mi docencia habitual aquellas herramientas que me han reportado un beneficio claro en la dinámica de clase. En particular, estos aspectos a incorporar son:

- Dinámicas donde se daba un tiempo a los estudiantes para que ya sea de forma individual o en pequeños grupos, *realizaran alguna pequeña demostración o aplicación que completase la teoría*. Tras ese trabajo, hacemos una puesta en común del resultado. Este tipo de dinámicas que hace al alumno tomar un papel protagonista, rompiendo con la pasividad tradicional del modelo transmisivo, me resulta especialmente útil como comprobante que estamos construyendo sobre seguro.
- *Animar a los alumnos a salir a la pizarra a resolver problemas*, incentivándolo con una calificación extra para la asignatura. Me reafirmo en mi confianza con esta práctica. Muchas veces, la compatibilización por parte de los alumnos del estudio de todas las asignaturas que están cursando les hace ir dejando material sin trabajar. El incentivo de las actividades de evaluación continua hace que los alumnos se enfrenten a la dificultad de la materia de forma periódica, y no dilatada, en el tiempo. De esta manera, se dan cuenta si realmente van aprendiendo lo que necesitarán para el manejo de lo aprendido o si, por el contrario, necesitan reforzar y practicar más para acrecentar su agilidad a la hora de resolver problemas.
- *Uso de TIC (fundamentalmente Mathematica)*, para la visualización de simulaciones donde podemos materializar trayectorias de sistemas dinámicos. Pese al considerable tiempo que conlleva preparar una simulación interesante que cumpla con fines didácticos, la experiencia en el aula ha sido muy positiva. El contacto directo con los fenómenos los motiva y les ayuda a comprender en mayor profundidad.

Principios Docentes argumentados

Pese a lo evidente que pueda parecer, mi mayor aprendizaje en este inicio en el ámbito de la innovación docente ha sido *el descubrimiento del buen funcionamiento de una reflexión profunda y consciente en la práctica docente*. Pensar minuciosamente sobre el qué y el cómo debe ser la práctica docente resume la mayor parte de lo que ha supuesto este CIMA en mi experiencia. Esta reflexión me ha permitido planificar y adaptar las tres patas de mi modelo docente (metodología, contenidos y evaluación) en función de mi propósito concreto.

El otro principio fundamental que ha sustentado la práctica docente durante mi CIMA ha sido *el trabajar en torno a problemas*. Esto no ha sido algo que confrontase con mi práctica docente más habitual, pues siempre me he interesado por intentar enseñar con un propósito. Aunque mi ámbito en investigación es fundamentalmente teórico y así sucede también con las materias que suelo impartir, la física teórica busca la descripción de realidades físicas, por lo que los problemas, en mi opinión, deben estar siempre presente tanto en su desarrollo como en su aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Bain, K. (2007). *Lo que hacen los mejores profesores universitarios.* Publicacions de la Universitat de València

De Alba, N. y Porlán, R. (2017). La metodología de enseñanza. En R. Porlán (Coord.). *Enseñanza universitaria. Cómo mejorarla* (pp. 37-53). Morata.

Delord, G.; Hamed, S.; Porlán, R. y De Alba, N. (2020). Los Ciclos de Mejora en el Aula. En N. De Alba y R. Porlán (Coords.)*, Docentes universitarios. Una formación centrada en la práctica* (pp. 128-162). Morata.

Lanczos, C. (1986). *The variational principles of mechanics.* Ed. Dover.

Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. (1994). *Mecánica (Volumen 1 del Curso de Física Teórica)*. Reverté.

Finkel, D. (2008). *Dar clase con la boca cerrada*. Publicacions de la Universitat de València.

Rivero, A. y Porlán, R. (2017). La evaluación en la enseñanza universitaria. En R. Porlán (Coord.), *Enseñanza universitaria. Como mejorarla* (pp. 73-91). Morata.