

# ITERACIÓN DE FUNCIONES ANALÍTICAS EN EL DISCO UNIDAD

MANUEL D. CONTRERAS

*Universidad de Sevilla*

ABSTRACT. La teoría de iteración compleja incluye aquellos aspectos de la dinámica relacionada de alguna forma con el comportamiento asintótico de las iteradas de una función holomorfa en una variedad compleja. Los primeros resultados de esta teoría pueden encontrarse en las últimas décadas del siglo XIX y principalmente a comienzos del siglo XX. Hoy en día, este tema sigue siendo de gran actualidad. Indudablemente, en esta teoría los aspectos geométricos juegan un papel muy importante y es esencial el tipo de variedad con la que estemos trabajando. En dimensión compleja uno, hay tres tipos muy distintos de variedades simplemente conexas que pueden ser reducidos a los siguientes: la esfera de Riemann, el plano complejo y el disco unidad. El estudio de este último caso es el objetivo fundamental de este curso.

El teorema de Denjoy-Wolff garantiza que si  $\varphi$  es una autoaplicación analítica del disco unidad que no es un automorfismo elíptico, entonces existe un punto  $\tau \in \mathbb{D}$  tal que las iteradas de  $\varphi$  convergen a  $\tau$  uniformemente sobre compactos. Atendiendo al comportamiento de  $\varphi$  alrededor del punto  $\tau$  las autoaplicaciones del disco unidad se clasifican en tres grandes grupos: elípticas, hiperbólicas y parabólicas. Mostraremos con ejemplos y resultados cómo la dinámica depende fuertemente del tipo de aplicación que se tenga.

Tras dedicar una parte del curso al teorema de Denjoy-Wolff (básico y punto de arranque de toda la teoría) junto con la introducción de conceptos como el de derivada angular y la métrica hiperbólica abordaremos dos temas de actualidad:

1. La teoría de modelos lineales fraccionales que permite "linealizar" toda autoaplicación analítica del disco unidad.
2. Comportamiento en la frontera de las iteradas de una autoaplicación analítica del disco unidad, mostrando conexiones con la teoría ergódica.

Mostraremos ejemplos que ilustren los resultados y dejaremos planteados problemas abiertos relacionados con los temas expuestos.

## CONTENTS

1. Situación de nuestro curso en un contexto más general.	2
2. Los automorfismos del disco unidad.	3
3. Distancia hiperbólica.	5
4. El teorema de Denjoy-Wolff.	5
4.1. Demostración del Teorema de Denjoy-Wolff cuando $\varphi$ tiene un punto fijo $p \in \mathbb{D}$	6

---

*Date:* January 26, 2009.

Notas preparadas para el *I Encuentro Iberoamericano sobre Teoría Geométrica de Funciones y Dinámica Compleja*. Creo necesario dejar claro que la decisión de los temas que se tratan en el curso está fuertemente influida por mi experiencia personal, por los problemas a los que he dedicado parte de mi investigación en los últimos seis o siete años. Gran parte de esa investigación la he realizado con tres compañeros y amigos: Filippo Bracci, Santiago Díaz-Madrigal y Christian Pommerenke. Mucho he aprendido junto a ellos y de ellos. Quiero agradecer también a Fernando Pérez González la invitación para participar en el Encuentro.

4.2. Demostración del Teorema de Denjoy-Wolff cuando $\varphi$ no tiene puntos fijos en $\mathbb{D}$	7
5. La derivada angular.	9
6. Modelos lineales fraccionarios	11
6.1. El caso elíptico.	11
6.2. El caso hiperbólico.	13
6.3. Un paréntesis: el paso hiperbólico.	13
6.4. El caso parabólico.	14
6.5. Algunas aplicaciones de la teoría de modelos.	16
7. Comportamiento de las iteradas en la frontera	17
7.1. Convergencia en la frontera al punto de Denjoy-Wolff.	17
7.2. Comportamiento cuando no hay convergencia. Productos de Blaschke.	19
References	21

## 1. SITUACIÓN DE NUESTRO CURSO EN UN CONTEXTO MÁS GENERAL.

La teoría de iteración compleja incluye aquellos aspectos de la dinámica relacionada con el comportamiento asintótico de sistemas dinámicos discretos sobre una variedad compleja. Más concretamente, sea  $M$  una variedad compleja y  $\varphi : M \rightarrow M$  una aplicación holomorfa. Puesto que  $\varphi(M) \subseteq M$ , podemos formar las iteradas  $\varphi_n = \varphi \circ \dots \circ \varphi$   <sup>$n$ -veces</sup>. Pues bien, el objetivo de la dinámica compleja es estudiar el comportamiento asintótico de la sucesión de funciones  $\varphi_n$ .

Resultados de esta teoría pueden encontrarse en trabajos y monografías desde las últimas décadas del siglo XIX y el impulso definitivo fue dado por matemáticos como Poincaré, Julia, Fatou, Denjoy, Wolff, Carathéodory, ...

En las últimas décadas se ha producido un renacimiento de esta teoría gracias a la aparición de nuevas técnicas de demostraciones y la conexión con otras áreas de las matemáticas como la teoría de operadores, teoría ergódica, teoría de probabilidad, ecuaciones diferenciales, ... Esta variedad de aplicaciones es, sin duda, un reflejo de la diversidad de técnicas matemáticas usadas en los argumentos. Como veremos a lo largo del curso, los aspectos geométricos juegan un papel fundamental.

Un papel básico de la teoría lo constituye el tipo de variedad en la que estamos trabajando. Si  $g$  es una aplicación univalente (holomorfa e inyectiva) de una variedad  $M$  sobre  $N$ , entonces la función

$$\psi := g \circ \varphi \circ g^{-1} : N \longrightarrow N$$

es holomorfa y las iteradas verifican que

$$\psi_n = (g \circ \varphi \circ g^{-1}) \circ \overset{n\text{-veces}}{(g \circ \varphi \circ g^{-1})} \circ \dots \circ \overset{n\text{-veces}}{(g \circ \varphi \circ g^{-1})} = g \circ \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi \circ g^{-1} = g \circ \varphi_n \circ g^{-1}.$$

De ahí que no importa mucho en cuanto a la iteración si consideramos el comportamiento de las iteradas de  $\varphi$  en  $M$  o el de las iteradas de  $\psi$  en  $N$ .

Este sencillo argumento y el teorema de uniformización de Poincaré y Koebe, nos permite reducirnos a uno de los siguientes tres casos cuando queremos trabajar con una variedad compleja simplemente conexa de dimensión uno:

- La esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  y la iteración de funciones racionales. Quizás el ejemplo más famoso es  $\varphi(z) = z^2 + c$ . El comportamiento de  $\varphi_n(z)$  depende mucho del número  $z$  y del parámetro  $c$ .

- El plano complejo  $\mathbb{C}$  y la iteración de funciones enteras. Un ejemplo clásico es el comportamiento de las iteradas de la función exponencial.
- El disco unidad  $\mathbb{D}$ , que es el caso que estudiaremos en este curso.

Los dos primeros casos constituyen una teoría profunda y difícil (véanse, por ejemplo, los textos [36] y [56]). En el contexto del que nos ocupamos en nuestro curso no hay nada tan complicado como la "sencilla" función  $\varphi(z) = z^2 + c$ . La razón que está detrás de que la iteración de funciones en el disco unidad sea radicalmente distinta a los otros dos casos está en el teorema de Montel:

**Theorem 1.1** (Montel). *La familia de todas las aplicaciones analíticas definidas en un dominio arbitrario  $D$  en el plano complejo menos dos puntos es una familia normal.*

En nuestro contexto, si  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , la familia  $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$  es normal, es decir, cada sucesión de esta familia tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos a una función analítica (que podría ser una función constante). Esto no es verdad si cambiamos el disco unidad por el plano complejo o la esfera de Riemann.

Obviamente en un curso introductorio como éste no se pueden tocar todos los temas y las conexiones con otras áreas. Remitimos al trabajo recopilatorio [19] donde se profundiza en algunos otros temas y se muestra una gran variedad de ejemplos. Hemos tratado de mantener el difícil equilibrio entre las demostraciones que presentamos e intentar mostrar los últimos avances de la teoría.

Por problemas de espacio no tocamos la iteración continua (también llamada fraccional) que conecta este mundo con el de las ecuaciones diferenciales. Una introducción a tal tema puede encontrarse en [55].

Antes de finalizar estos comentarios introductorios, debemos decir que nuestro enfoque es global, es decir, las funciones que se consideran están definidas en toda la variedad. Existe una teoría local que puede consultarse en el trabajo introductorio de Abate [5].

## 2. LOS AUTOMORFISMOS DEL DISCO UNIDAD.

En lo que sigue, denotaremos por  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  a las autoaplicaciones analíticas del disco unidad  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , es decir,  $\varphi$  es analítica en  $\mathbb{D}$  y  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Como ya hemos comentado, denotamos por  $\varphi_n$  la iterada  $n$ -ésima de  $\varphi$ .

**Proposition 2.1.** *Una autoaplicación analítica  $\varphi$  del disco unidad es un automorfismo si y sólo si existen dos números complejos  $p \in \mathbb{D}$  y  $\lambda \in \partial\mathbb{D}$  tales que*

$$\varphi(z) = \lambda \frac{z - p}{1 - \bar{p}z}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Éstas aplicaciones constituyen el grupo de automorfismos del disco unidad que notaremos mediante  $\text{Möb}(\mathbb{D})$ .

Un ejemplo que aparecerá repetidas veces son las funciones  $\alpha_p(z) = \frac{p-z}{1-\bar{p}z}$ . Este automorfismo  $\alpha_p$  tiene la particularidad de que intercambia 0 y  $p$  y su inversa es la misma función (es decir,  $\alpha_p^{-1} = \alpha_p$ ).

Analicemos los puntos fijos que  $\varphi$  tiene en el plano complejo. Es claro que  $\varphi(z) = z$  si y sólo si

$$\bar{p}z^2 + (\lambda - 1)z - \lambda p = 0.$$

Si  $p = 0$ , entonces  $(\lambda - 1)z = 0$  y, salvo que  $\varphi$  sea la identidad, tenemos que el único punto fijo es  $z = 0$ . Si  $p \neq 0$ , entonces hay dos soluciones de la anterior ecuación  $z_1$  y  $z_2$  que

verifican  $z_1 z_2 = -\lambda \frac{p}{\bar{p}} \in \partial \mathbb{D}$  (esto implica que  $|z_1| |z_2| = 1$ ) y  $\bar{p} z_2 + \bar{p} z_1 = 1 - \lambda$ . Además,

$$\begin{aligned} \varphi'(z_1) \varphi'(z_2) &= \lambda \frac{1 - |p|^2}{(1 - \bar{p} z_1)^2} \lambda \frac{1 - |p|^2}{(1 - \bar{p} z_2)^2} = \lambda^2 \frac{(1 - |p|^2)^2}{((1 - \bar{p} z_1)(1 - \bar{p} z_2))^2} \\ &= \lambda^2 \frac{(1 - |p|^2)^2}{(1 - \bar{p} z_2 - \bar{p} z_1 + \bar{p} \bar{p} z_1 z_2)^2} = \lambda^2 \frac{(1 - |p|^2)^2}{(1 - 1 + \lambda - \bar{p} \lambda p)^2} = \frac{(1 - |p|^2)^2}{(1 - |p|^2)^2} = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, una de las dos derivadas tiene módulo menor o igual a uno.

Este elemental análisis nos muestra que siempre estamos en una de las siguientes tres situaciones:

(i)  $\varphi$  es *elíptico*, es decir, tiene un único punto fijo  $\tau \in \mathbb{D}$  y otro en  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  (recordemos que  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ). En este caso, la función  $\psi = \alpha_\tau \circ \varphi \circ \alpha_\tau$  es un automorfismo del disco que fija el cero. Por tanto, existe un  $\beta \in \partial \mathbb{D}$ , tal que

$$\alpha_\tau \circ \varphi \circ \alpha_\tau(z) = \beta z \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Es inmediato comprobar que  $\beta = \varphi'(0)$ . En este caso, las iteradas verifican que

$$\alpha_\tau \circ \varphi_n \circ \alpha_\tau(z) = \beta^n z.$$

Es decir,  $\varphi_n(z) = \alpha_\tau(\beta^n \alpha_\tau(z))$ .

Sea  $0 < r < 1$  y consideremos el disco  $D_r = \alpha_\tau(r\mathbb{D})$ . Puesto que  $\varphi(\alpha_\tau(rz)) = \alpha_\tau(\beta rz)$  para todo  $z$  del disco unidad, tenemos que  $\varphi(D_r) = D_r$  para todo  $r$ . Tenemos así una familia de disco que son invariantes por  $\varphi$ .

(ii)  $\varphi$  es *hiperbólico*, es decir, tiene dos puntos fijos distintos en la frontera del disco unidad  $\tau$  y  $\xi$  con  $|\varphi'(\tau)| \leq 1$ . Vamos a usar la transformación de Cayley  $T(z) = \frac{\tau + z}{\tau - z}$  que lleva el disco unidad  $\mathbb{D}$  en el semiplano derecho  $\mathbb{H} = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$  y cuya inversa es  $T^{-1}(w) = \tau \frac{w - 1}{w + 1}$ . Definamos  $\psi = T \circ \varphi \circ T^{-1}$ . Ésta es una transformación de Möbius que fija el punto  $\infty$ . Es decir,  $\psi(w) = aw + b$ . Como además, tiene que fijar el eje imaginario, se tiene que si  $\operatorname{Re} w = 0$ , entonces  $\operatorname{Re} \psi(w)$  también debe ser cero. Es decir,  $\operatorname{Re}(axi + b) = 0$  para todo  $x$  real. Esto implica que  $\operatorname{Re} b = 0$  e  $\operatorname{Im} a = 0$ . Un simple cálculo muestra que  $a = \frac{1}{\varphi'(\tau)} \geq 1$ . Pero si  $a = 1$ , entonces  $\psi(w) = w + b$  y no hay más puntos fijos. Por tanto,  $\varphi'(\tau) = \frac{1}{a} < 1$ . Iterando obtenemos que  $\psi_n(w) = a^n w + \frac{1 - a^n}{1 - a} b$ . Por lo que,  $\psi_n(w)$  converge a  $\infty$  para todo  $w \in \mathbb{H}$ . Es decir,  $\varphi_n(z)$  converge a  $\tau$  para todo  $z$  del disco unidad.

Además, si tomamos  $\alpha > 0$  y  $\Pi = \{w : \operatorname{Re} w > \alpha\}$ , entonces  $\psi(\Pi) \subset \Pi$ . Por tanto,  $\varphi$  deja invariante cualquier disco en  $\mathbb{D}$  tangente a  $\partial \mathbb{D}$  en  $\tau$ .

(iii)  $\varphi$  es *parabólico*, es decir, tiene un único punto fijo en la frontera del disco unidad  $\tau$ . De nuevo definimos  $\psi = T \circ \varphi \circ T^{-1}$ . Ésta es una transformación de Möbius que fija el punto  $\infty$ . Es decir,  $\psi(w) = aw + b$ . Como además, tiene que fijar el eje imaginario, se tiene que si  $\operatorname{Re} w = 0$ , entonces  $\operatorname{Re} \psi(w)$  también debe ser cero. Es decir,  $\operatorname{Re}(axi + b) = 0$  para todo  $x$  real. Esto implica que  $\operatorname{Re} b = 0$  e  $\operatorname{Im} a = 0$ . Finalmente, sabemos que no tiene más puntos fijos. Esto implica que  $a = 1$ , con lo que  $\varphi'(\tau) = 1$ . Es decir,  $\psi(w) = w + b$  con  $\operatorname{Re} b = 0$  y  $\psi_n(w) = w + nb$ . Por lo que,  $\psi_n(w)$  converge a  $\infty$  para todo  $w \in \mathbb{H}$ . Es decir,  $\varphi_n(z)$  converge a  $\tau$  para todo  $z$  del disco unidad.

De nuevo tenemos que si  $\alpha > 0$  y  $\Pi = \{w : \operatorname{Re} w > \alpha\}$ , entonces  $\psi(\Pi) = \Pi$ . Por tanto,  $\varphi$  deja invariante cualquier disco en  $\mathbb{D}$  tangente a  $\partial \mathbb{D}$  en  $\tau$ .

Resumiendo, si  $\varphi$  tiene un punto fijo  $\tau$  en el disco unidad, entonces  $\varphi$  es una “rotación” alrededor de  $\tau$ . En caso contrario,  $\varphi$  tiene un punto fijo en la frontera del disco unidad

tal que sus iteradas convergen a él. También es importante resaltar esa familia de discos que son globalmente invariantes. Veremos en las próximas secciones que éstas no son propiedades específicas de los automorfismos ya que las comparten con cualquier autoaplicación analítica del disco unidad.

### 3. DISTANCIA HIPERBÓLICA.

Una herramienta fundamental en el estudio de la dinámica compleja en el disco unidad es la distancia hiperbólica que viene dada por

$$\rho(z, w) := \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right|}{1 - \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right|} \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{D}.$$

La comprobación de que ésta es una métrica completa en el disco unidad es un ejercicio elemental.

Sea  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Fijemos  $z \in \mathbb{D}$  y  $b = \varphi(z)$ . Entonces la aplicación  $\psi = \alpha_b \circ \varphi \circ \alpha_z$  es una autoaplicación del disco unidad que fija el cero. Por el lema de Schwarz, para cada  $w \in \mathbb{D}$  tenemos que

$$|\alpha_b \circ \varphi \circ \alpha_z(w)| \leq |w|.$$

Aplicando esto al punto  $\alpha_z(w)$  tenemos que  $|\alpha_b \circ \varphi(w)| \leq |\alpha_z(w)|$ , es decir,

$$\left| \frac{\varphi(z) - \varphi(w)}{1 - \overline{\varphi(z)}\varphi(w)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right|$$

para cualesquiera dos puntos  $z$  y  $w$  en el disco unidad. Puesto que la función  $x \in [0, +\infty) \mapsto \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$  es creciente obtenemos que

$$\rho(\varphi(z), \varphi(w)) \leq \rho(z, w)$$

para cualesquiera  $z$  y  $w$  en el disco unidad. Un análisis detallado de este último argumento muestra que la igualdad se da para una pareja de puntos distintos  $z$  y  $w$  en el disco unidad si y sólo si  $\varphi$  es un automorfismo del disco unidad. Resumiendo, hemos obtenido el siguiente resultado clave para las aplicaciones de la métrica hiperbólica a la iteración de funciones analíticas en el disco unidad.

**Proposition 3.1.** *Toda autoaplicación analítica en el disco unidad es una contracción para la métrica hiperbólica. Es decir, si  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  entonces*

$$\rho(\varphi(z), \varphi(w)) \leq \rho(z, w) \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{D}.$$

*Además, la igualdad se da para algún par de puntos distintos si y sólo si  $\varphi$  es un automorfismo del disco unidad y esto sucede si y sólo si se da la igualdad para toda pareja de puntos.*

### 4. EL TEOREMA DE DENJOY-WOLFF.

El punto de arranque de la dinámica en el disco unidad lo constituye el conocido como teorema de Denjoy-Wolff del año 1926. Concretamente, fue Wolff el primero que lo estableció en el año 1925 para funciones analíticas en el disco unidad que tienen una extensión continua al disco unidad cerrado. Unas semanas después, aparecieron dos trabajos independientes de Denjoy y de Wolff mostrando el resultado tal y como lo vamos a establecer más abajo.

Antes de nada mostramos algunos ejemplos que ilustran lo que ocurre en general.

**Example 4.1.** Consideremos  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  dada por  $\varphi(z) = z^2$ . Obviamente,  $\varphi_n(z) = z^{2^n}$  y, por tanto,  $\varphi_n(z) \rightarrow 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

**Example 4.2.** Consideremos  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  dada por  $\varphi(z) = 1 - (1 - z)^\alpha$ , donde  $0 < \alpha < 1$ . Entonces,  $\varphi_n(z) = 1 - (1 - z)^{\alpha^n}$  y, por tanto,  $\varphi_n(z) \rightarrow 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

Observemos que en ambos casos 0 es un punto fijo de  $\varphi$ . Veamos ahora algún ejemplo de funciones sin puntos fijos en el disco unidad.

**Example 4.3.** Consideremos  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  dada por  $\varphi(z) = \frac{1}{2-z}$ . Entonces,  $\varphi_n(z) = \frac{(1-n)z+n}{1+n-nz}$  y, por tanto,  $\varphi_n(z) \rightarrow 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

**Example 4.4.** Consideremos  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  dada por  $\varphi(z) = 1 - \frac{1-z}{(1+(1-z)^2)^{1/2}}$ . Entonces,  $\varphi_n(z) = 1 - \frac{1-z}{(1+n(1-z)^2)^{1/2}}$  y, por tanto,  $\varphi_n(z) \rightarrow 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

Es decir, en ambos casos la sucesión de iteradas converge a la función constantemente 1. Sabemos que un resultado de este tipo no puede ser cierto en general, como muestra el ejemplo de las rotaciones (y más generalmente los automorfismos elípticos del disco unidad). Pues bien, ésta es la única excepción posible.

**Theorem 4.1** (Denjoy, Wolff, 1926). *Sea  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  que no es un automorfismo elíptico. Entonces existe un punto  $\tau \in \overline{\mathbb{D}}$  tal que la sucesión de iteradas  $\varphi_n$  converge a  $\tau$  uniformemente sobre compactos de  $\mathbb{D}$ .*

**Definition 4.1.** *El punto  $\tau$  se llama punto de Denjoy-Wolff de  $\varphi$ .*

La demostración la haremos con detalle. Hay dos casos bien diferentes: cuando  $\varphi$  tiene un punto fijo en  $\mathbb{D}$  y cuando no lo tiene. Para el segundo caso seguiremos la demostración de Burckel que puede verse en [15].

**4.1. Demostración del Teorema de Denjoy-Wolff cuando  $\varphi$  tiene un punto fijo  $p \in \mathbb{D}$ .** Recordemos que la función  $\varphi$  tiene a lo sumo un punto fijo en el disco unidad. Supongamos en primer lugar que  $p = 0$ . Usando que  $\varphi$  no es un automorfismo, por el lema de Schwarz tenemos que  $|\varphi(z)| < |z|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

Fijemos  $0 < r < 1$ . Llamemos  $M(r) = \sup\{|\varphi(z)| : |z| \leq r\}$  y  $\delta = M(r)/r$ . El lema de Schwarz afirma que  $\delta < 1$ .

Notemos  $\psi(z) = \varphi(rz)/M(r)$ . La función  $\psi$  es analítica en el disco unidad, lleva el disco unidad en sí mismo y  $\psi(0) = 0$ . De nuevo podemos aplicar el lema de Schwarz para concluir que  $|\psi(z)| \leq |z|$  para todo  $z$ , esto es,  $|\varphi(rz)| \leq M(r)|z|$  para todo  $z$  en el disco unidad. De esta forma si  $|z| \leq r$ , entonces

$$|\varphi(z)| = |\varphi(r \frac{z}{r})| \leq M(r) |\frac{z}{r}| = \delta |z|$$

(obsérvese que este sencillo argumento es una ligera mejora del propio lema de Schwarz). Usando que  $|\varphi(z)| < |z|$  e iterando el proceso tenemos que

$$|\varphi_n(z)| \leq \delta^n |z|$$

para todo  $z$  de módulo menor que  $r$ . Esto implica que  $\varphi_n$  converge a cero uniformemente en  $r\overline{\mathbb{D}}$ .

Supongamos ahora que  $p \neq 0$ . Llamamos  $\psi = \alpha_p \circ \varphi \circ \alpha_p$ . Entonces  $\psi$  es una autoaplicación analítica del disco unidad que fija el punto cero y que no es automorfismo del disco unidad. Por lo anteriormente visto,  $\psi_n(z)$  converge a cero uniformemente sobre compactos en el disco unidad. Puesto que  $\psi_n = \alpha_p \circ \varphi_n \circ \alpha_p$ , tenemos que  $\psi_n \circ \alpha_p(z)$  converge a cero

y  $\varphi_n(z) = \alpha_p \circ \psi_n \circ \alpha_p(z)$  converge a  $\alpha_p(0) = p$  uniformemente sobre compactos en el disco unidad.

Esto finaliza la prueba cuando  $\varphi$  tiene un punto fijo en el disco unidad.

**4.2. Demostración del Teorema de Denjoy-Wolff cuando  $\varphi$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{D}$ .** Esta situación es bastante más complicada, esencialmente por no tener el lema de Schwarz. Tal lema se ha utilizado para construir una familia de discos (los centrados en cero y de radio  $r$ ) que son invariantes por  $\varphi$ . Cuando  $\varphi$  no tiene puntos fijos, esta idea se puede sustituir por el siguiente

**Theorem 4.2** (Lema de Wolff). *Sea  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  sin puntos fijos en el disco unidad. Entonces existe un único punto  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  tal que si  $D$  es un disco contenido en  $\mathbb{D}$  que es tangente a  $\partial\mathbb{D}$  en  $\tau$ , entonces  $\varphi(D) \subseteq D$ . Es decir,*

$$(4.1) \quad \frac{1 - |z|^2}{|\tau - z|^2} \leq \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|\tau - \varphi(z)|^2}$$

para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

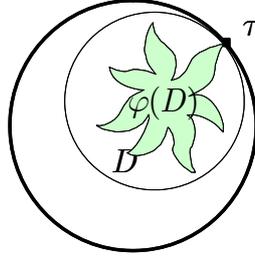


Ilustración del lema de Wolff

*Proof.* Fijemos una sucesión  $(r_k)$  de números reales positivos y creciente convergente a 1 y llamemos  $\psi^k(z) = \varphi(r_k z)$  para todo  $k$  y para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Entonces cada  $\psi^k$  es una función analítica en el disco cerrado  $\overline{\mathbb{D}}$  y para cada  $z \in \partial\mathbb{D}$  se tiene que

$$|z - (z - \psi^k(z))| = |\varphi(r_k z)| < 1 = |z|.$$

Por el Teorema de Rouché, la función  $Id - \psi^k$  tiene tantos ceros en el disco unidad como la función identidad  $Id$ . Es decir, existe un único  $z_k \in \mathbb{D}$  tal que  $\varphi(r_k z_k) = \psi^k(z_k) = z_k$ .

Pasando a una subsucesión si es necesario podemos suponer que  $z_k$  converge a un punto  $\tau \in \overline{\mathbb{D}}$ . Si  $\tau \in \mathbb{D}$ , entonces

$$\tau = \lim_k z_k = \lim_k \varphi(r_k z_k) = \varphi \left( \lim_k r_k z_k \right) = \varphi(\tau).$$

Lo que contradice que  $\varphi$  está libre de puntos fijos en el disco unidad abierto. Por tanto,  $\tau \in \partial\mathbb{D}$ .

Fijemos  $D$  un disco en  $\mathbb{D}$  tangente a  $\partial\mathbb{D}$  en  $\tau$ . Entonces existe un  $0 < \delta < 1$  tal que  $D$  es el disco centrado en  $\delta\tau$  y radio  $1 - \delta$ . Tomemos  $z \in \partial D \cap \mathbb{D}$ . De la ecuación  $|z - \delta\tau| = 1 - \delta$ ,

$$\text{uno deduce sin dificultad que } \delta = \frac{1 - |z|^2}{2 - 2 \operatorname{Re}(\overline{\tau}z)}.$$

La función  $f^k = \alpha_{z_k} \circ \psi^k \circ \alpha_{z_k}$  es una autoaplicación analítica del disco unidad en sí mismo, que fija el punto 0. Por tanto,  $|f^k(w)| \leq |w|$  para todo  $w \in \mathbb{D}$ . Aplicando esto al punto  $\alpha_{z_k}(w)$  obtenemos que

$$\left| \frac{\psi^k(w) - z_k}{1 - \overline{z_k} \psi^k(w)} \right| \leq \left| \frac{w - z_k}{1 - \overline{z_k} w} \right|$$

para todo  $w \in \mathbb{D}$ . Si llamamos  $\rho_k = \left| \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z} \right|$ , esta desigualdad dice  $\alpha_{z_k} \circ \psi^k(z)$  pertenece al disco de centro el origen y radio  $\rho_k$ . Es decir,  $\psi^k(z)$  pertenece al disco  $\alpha_{z_k}(\{w \in \mathbb{D} : |w| \leq \rho_k\})$ . Puede probarse que el centro de este disco es  $c(k) = \frac{1 - \rho_k^2}{1 - \rho_k^2 |z_k|^2} z_k$  y su radio  $R(k) = \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \rho_k^2 |z_k|^2} \rho_k$ . Es decir,

$$\left| \psi^k(z) - \frac{1 - \rho_k^2}{1 - \rho_k^2 |z_k|^2} z_k \right| \leq \frac{1 - \rho_k^2}{1 - \rho_k^2 |z_k|^2} \rho_k.$$

Por otro lado,

$$1 - \rho_k^2 |z_k|^2 = \frac{(1 - |z_k|^2)(1 + |z_k|^2 - 2 \operatorname{Re}(\overline{z_k}z))}{|1 - \overline{z_k}z|^2}.$$

Así que

$$\begin{aligned} R(k) &= \frac{1 - |z_k|^2}{1 - \rho_k^2 |z_k|^2} \rho_k \\ &= \frac{|1 - \overline{z_k}z|^2}{1 + |z_k|^2 - 2 \operatorname{Re}(\overline{z_k}z)} \left| \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z} \right| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{|1 - \overline{\tau}z|^2}{2 - 2 \operatorname{Re}(\overline{\tau}z)} = 1 - \frac{1 - |z|^2}{2 - 2 \operatorname{Re}(\overline{\tau}z)} = 1 - \delta \end{aligned}$$

y

$$c(k) = \frac{1 - \rho_k^2}{1 - \rho_k^2 |z_k|^2} z_k = \frac{1 - |z|^2}{1 + |z_k|^2 - 2 \operatorname{Re}(\overline{z_k}z)} z_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1 - |z|^2}{2 - 2 \operatorname{Re}(\overline{\tau}z)} \tau = \delta \tau.$$

Tomando límites en  $k$  concluimos que

$$|\varphi(z) - \delta \tau| \leq 1 - \delta$$

para todo  $z$  en la frontera del disco de centro  $\delta \tau$  y radio  $1 - \delta$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

Este argumento muestra que  $\varphi(\partial D) \subset \overline{D}$ . Puesto que esto se verifica para todo disco tangente a la frontera en  $\tau$ , concluimos que  $\varphi(D) \subset \overline{D}$ . El hecho de que  $\varphi$  sea analítica y no constante, permite concluir que  $\varphi(D) \subset D$ .

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que existen dos puntos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  que satisfacen la tesis. Tomemos dos discos  $D_1$  y  $D_2$  tales que  $D_j$  es tangente al disco unidad en  $\tau_j$ ,  $j = 1, 2$ , y tangentes entre sí. Sea  $z$  el único punto común del borde de ambos disco. Aplicando la tesis del teorema tenemos que  $\varphi(z)$  pertenece tanto a  $\overline{D_1}$  como a  $\overline{D_2}$ . Por tanto,  $\varphi(z) = z$ , lo que contradice que  $\varphi$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{D}$ .

Analicemos ahora la interpretación analítica que aparece en la desigualdad (4.1). De nuevo usamos la transformación de Cayley  $T(z) = \frac{\tau + z}{\tau - z}$  que lleva el disco unidad  $\mathbb{D}$  en el semiplano derecho  $\mathbb{H} = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$  y cuya inversa es  $T^{-1}(w) = \tau \frac{w - 1}{w + 1}$ . Definamos  $\psi = T \circ \varphi \circ T^{-1}$ . Los discos tangentes a  $\tau$  se transforman mediante  $T$  en semiplanos cuya frontera es una recta vertical. Por tanto, llevar discos tangentes en su interior se reescribe en el semiplano mediante:  $\operatorname{Re} w \leq \operatorname{Re} \psi(w)$  para todo  $w \in \mathbb{H}$ . Pero si  $z$  es un punto del disco unidad y llamamos  $w = T(z)$  entonces

$$\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} \frac{\tau + z}{\tau - z} = \frac{1 - |z|^2}{|\tau - z|^2}.$$

Por otro lado  $\psi(w) = T(\varphi(z))$  y

$$\operatorname{Re} \psi(w) = \operatorname{Re} \frac{\tau + \varphi(z)}{\tau - \varphi(z)} = \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|\tau - \varphi(z)|^2}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1 - |z|^2}{|\tau - z|^2} \leq \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|\tau - \varphi(z)|^2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

□

*Proof.* Pasamos ya a probar el Teorema de Denjoy-Wolff cuando  $\varphi$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{D}$ . Si la función es un automorfismo ya sabemos que el resultado es cierto. Así que supondremos que  $\varphi$  no es un automorfismo.

Sea  $z$  un punto del disco unidad.

Probamos en primer lugar que  $|\varphi_n(z)|$  converge a 1. Supongamos que no es así. Entonces existe un punto  $p \in \mathbb{D}$  y una subsucesión  $\varphi_{n_k}(z)$  que converge a  $p$ . Puesto que la sucesión  $\rho(\varphi_n(z), \varphi_{n+1}(z))$  es decreciente, existe un  $\delta \in [0, +\infty)$  tal que  $\rho(\varphi_n(z), \varphi_{n+1}(z)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta$ .

De esta forma

$$\rho(p, \varphi(p)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(\varphi_{n_k}(z), \varphi_{n_k+1}(z)) = \delta.$$

Por otro lado,

$$\rho(\varphi(p), \varphi_2(p)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(\varphi_{n_k+1}(z), \varphi_{n_k+2}(z)) = \delta.$$

Por tanto,  $\rho(p, \varphi(p)) = \rho(\varphi(p), \varphi_2(p))$ , lo que es imposible ya que  $p$  no es un punto fijo y  $\varphi$  no es un automorfismo.

Por consiguiente, tenemos que la sucesión  $\varphi_n(z)$  se aproxima a la frontera, pero, por otro lado, permanece siempre en el disco tangente a  $\tau$  de radio,  $\frac{|1 - \bar{\tau}z|^2}{2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{\tau}z)} = 1 - \delta$  y centro  $\delta\tau$ . Esto implica que  $\varphi_n(z)$  converge a  $\tau$ .

Finalmente, el teorema de Vitali (acotación y convergencia puntual implica convergencia uniforme sobre compactos) permite concluir la convergencia uniforme sobre compactos de  $\varphi_n$  a  $\tau$ . □

## 5. LA DERIVADA ANGULAR.

Decimos que una función  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  tiene límite angular  $L \in \widehat{\mathbb{C}}$  en el punto  $\xi \in \partial\mathbb{D}$  si para cada  $M > 0$  se verifica que

$$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in S(\xi, M)} f(z) = L$$

siendo  $S(\xi, M)$  la región de Stolz  $\left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|\xi - z|}{1 - |z|} < M \right\}$ . El conjunto  $S(\xi, M)$  es una región parecida a un ángulo con vértice en  $\xi$ . Usaremos la notación  $L = \angle \lim_{z \rightarrow \xi} f(z)$  para denotar tal límite. Los resultados de esta sección nos los vamos a demostrar. Una buena referencia para ver las demostraciones y profundizar en los conceptos angulares es el texto de Pommerenke [52].

Es claro que si  $L = \lim_{z \rightarrow \xi} f(z)$ , entonces  $L = \angle \lim_{z \rightarrow \xi} f(z)$ , lo que a su vez implica que  $L = \lim_{r \rightarrow 1} f(r\xi)$  (este último llamado límite radial), pero ninguna de los recíprocos son ciertos.

Presentamos un sencillo ejemplo que muestra la diferencia entre límite y límite angular. Consideremos la función  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  dada por  $\varphi(z) = \exp\left(-\frac{z+1}{z-1}\right)$ . Claramente  $\lim_{r \rightarrow 1} \varphi(r) = 0$ . Con un argumento un poco más elaborado puede verse que también  $\angle \lim_{z \rightarrow 1} \varphi(z) = 0$ . Por el contrario, si tomamos  $\theta \in (0, 2\pi)$ , se tiene que  $\varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\theta i}\right) = \varphi\left(-1 + 2\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}i\right)$ , un número complejo de módulo  $e^{-1}$ . Por tanto,  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\theta i}\right) \neq 0$ . Esto implica que no existe  $\lim_{z \rightarrow 1} \varphi(z)$ . La diferencia entre límite radial y angular es

algo menos elemental y sería necesario introducir el concepto de función normal para entenderla, algo que está fuera del alcance y objetivo de este curso.

Volvamos ahora a nuestro estudio del comportamiento de las iteradas de una aplicación  $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  sin puntos fijos. Llamemos  $\tau$  a su punto de Denjoy-Wolff. El lema de Wolff afirma que

$$(5.1) \quad \frac{1 - |z|^2}{|\tau - z|^2} \leq \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|\tau - \varphi(z)|^2}$$

para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

Por otro lado, para cada ángulo de Stolz  $S(\tau, \alpha)$ , existe una constante  $c$ , tal que  $|z - \tau| \leq c(1 - |z|)$  para todo  $z \in S(\tau, \alpha)$ . De esta forma

$$|\tau - \varphi(z)|^2 \leq (1 - |\varphi(z)|^2) \frac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2} \leq \frac{|\tau - z|}{1 - |z|} \frac{1}{1 + |z|} |\tau - z| \leq c|\tau - z|.$$

Y concluimos que  $\angle \lim_{z \rightarrow \tau} \varphi(z) = \tau$ . Es decir,  $\tau$  es un punto fijo (en sentido angular) de  $\varphi$ .

Decimos que una aplicación analítica  $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  tiene derivada angular en  $\xi \in \partial\mathbb{D}$  si existe el límite angular  $\angle \lim_{z \rightarrow \xi} \frac{\varphi(z) - \varphi(\xi)}{z - \xi} \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Siguiendo con la notación clásica de derivada, a tal límite lo notaremos  $\varphi'(\xi)$ . La relación entre dicha derivada angular y el límite angular de la derivada queda reflejada en el siguiente resultado.

**Proposition 5.1.** [52] *Sea  $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  y  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ . Entonces existe*

$$\varphi'(\xi) = \angle \lim_{z \rightarrow \xi} \frac{\varphi(z) - \varphi(\xi)}{z - \xi} \in \mathbb{C}$$

si, y sólo si, existe  $\angle \lim_{z \rightarrow \xi} \varphi'(z) \in \mathbb{C}$ , en cuyo caso se tiene que  $\varphi'(\xi) = \angle \lim_{z \rightarrow \xi} \varphi'(z)$ .

Si  $\varphi'(\xi) = \infty$ , puede que no exista  $\angle \lim_{z \rightarrow \xi} \varphi'(z)$ .

**Theorem 5.2** (Lema de Julia-Wolff). *Sea  $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  y  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ . Si el límite angular  $\varphi'(\xi)$  existe y si  $\varphi(\xi) \in \partial\mathbb{D}$ , entonces existe la derivada angular  $\varphi'(\xi) \in \widehat{\mathbb{C}}$  y*

$$0 < \xi \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(z)|^2}{1 - |\varphi(z)|^2}.$$

Aplicando esto a la función  $\varphi$  en el punto fijo  $\tau$ , teniendo en cuenta la desigualdad (5.1), concluimos que

$$0 < \varphi'(\tau) = \tau \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|\tau - z|^2} \frac{|\tau - \varphi(z)|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \leq 1.$$

**Corollary 5.3.** *Sea  $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  sin puntos fijos en  $\mathbb{D}$  y sea  $\tau$  su punto de Denjoy-Wolff. Entonces  $\tau$  es un punto fijo frontera para  $\varphi$ , existe la derivada angular de  $\varphi$  en  $\tau$  y  $\varphi'(\tau) \in (0, 1]$ . Recíprocamente, si  $\xi$  es otro punto fijo frontera de  $\varphi$  y  $\varphi'(\xi) \in (0, 1]$ , entonces  $\xi = \tau$ .*

Este resultado permite introducir la siguiente clasificación de autoaplicaciones analíticas del disco unidad, distintas de la identidad, atendiendo al comportamiento alrededor de su punto de Denjoy-Wolff:

- (a) *elípticas*: aquellas con un punto fijo en el disco unidad abierto;
- (b) *hiperbólicas*: las que tienen el punto de Denjoy-Wolff  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  y satisfacen que  $\varphi'(\tau) < 1$ ;

- (c) *parabólicas*: las que tienen el punto de Denjoy-Wolff  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  y satisfacen que  $\varphi'(\tau) = 1$ .

Mostramos ahora un par de aplicaciones sencillas e inmediatas que ilustran lo que estamos haciendo.

**Example 5.1.** *En primer lugar nos centramos en el problema de la extinción de apellidos: denotamos por  $p_k$  la probabilidad de que un individuo tenga exactamente  $k$  hijos varones. Es claro que  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ . Según el modelo de Galton-Watson (1874), si consideramos la función  $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ , la probabilidad de supervivencia del apellido es  $1 - \lim_n \varphi_n(0)$ .*

*¿Cuál es la probabilidad de que el apellido no desaparezca? Sea  $\tau$  el punto de Denjoy-Wolff de  $\varphi$ . Puesto que el segmento  $[0, 1]$  es invariante, tenemos que  $\tau \in [0, 1]$  y así el apellido desaparece si, y sólo si,  $\tau = 1$ . Puesto que 1 es un punto fijo, tenemos que 1 es el punto de Denjoy-Wolff si, y sólo si,  $\varphi'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \leq 1$  y esto ocurre si, y sólo si,  $p_0 \geq \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)p_k$ .*

**Example 5.2.** *Cuando aplicamos el método de Newton para resolver la ecuación  $z^2 - 1 = 0$ , se genera una sucesión de la forma  $z_{n+1} = \frac{1}{2} \left( z_n + \frac{1}{z_n} \right)$ . Si llamamos  $\varphi(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ , entonces analizar la convergencia del método de Newton equivale a estudiar los valores de  $z$  para los que la sucesión  $\varphi_n(z)$  es convergente.*

*Puesto que  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  y  $\varphi(1) = 1$ , aplicando el Teorema de Denjoy-Wolff al dominio simplemente conexo  $\mathbb{H}$  y a la función  $\varphi$  que tiene un punto fijo en el interior del semiplano, obtenemos que si  $z \in \mathbb{H}$ , entonces  $\varphi_n(z)$  converge a 1. Igualmente se comprueba que si  $\operatorname{Re} z < 0$ , entonces  $\varphi_n(z)$  converge a  $-1$ .*

*¿Qué comportamiento tiene la sucesión  $\varphi_n(z)$  si  $\operatorname{Re} z = 0$ ? Lo veremos al final del curso.*

## 6. MODELOS LINEALES FRACCIONARIOS

Uno de los resultados más importantes sobre las autoaplicaciones del disco unidad es el llamado Teorema del modelo lineal fraccional que afirma que las propiedades de las iteradas de cualquier aplicación de  $\operatorname{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  pueden verse por medio de las iteradas de una cierta aplicación lineal fraccional. La demostración de este teorema ha sido una tarea larga que ha durado casi un siglo y a la que han contribuido varios e importantes matemáticos (Koenigs, Valiron, Pommerenke, Baker, Cowen,...). Desde el punto de vista de la demostración, la clave para obtener los modelos ha sido la habilidad para diseñar conjugadas o aplicaciones de intercambio para diferentes tipos de aplicaciones analíticas en  $\mathbb{D}$ . Pero no sólo la existencia de tales aplicaciones ha sido importante, el análisis de su unicidad ha conllevado una especial atención desde el comienzo de la teoría.

**Definition 6.1.** *Sea  $\varphi \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ . Diremos que un conjunto  $V \subset \mathbb{D}$  es fundamental para  $\varphi$  si  $V$  es un abierto no vacío, simplemente conexo tal que  $\varphi(V) \subset V$  y, para cada compacto  $K \subset \mathbb{D}$ , existe un entero positivo  $N$  tal que  $\varphi_N(K) \subset V$ .*

Obsérvese que, a priori, la existencia de tales conjunto no es obvia. Veremos que siempre existen tales conjuntos e incluso, cuando la derivada no es cero en el punto de Denjoy-Wolff, con la propiedad adicional de que  $\varphi$  es univalente en  $V$ .

**6.1. El caso elíptico.** La historia comienza en 1884 cuando Koenigs trató el caso elíptico.

**Theorem 6.1.** *Sea  $\varphi \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , diferente de la identidad, con punto fijo  $0 \in \mathbb{D}$  tal que  $\lambda := \varphi'(0) \neq 0$  (necesariamente  $\lambda \neq 1$ ), entonces existe una única aplicación analítica  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  con  $\sigma(0) = 0$ ,  $\sigma'(0) = 1$  y*

$$\text{(Ec. de Schroeder)} \quad \sigma \circ \varphi = \lambda \sigma.$$

También se verifica que  $\sigma \circ \varphi_n = \lambda^n \sigma$  para todo  $n$ . Esto es,  $\sigma$  es una aplicación de intercambio entre las parejas de iteración  $(\varphi, \mathbb{D})$  y  $(\lambda z, \sigma(\mathbb{D}))$ . Además, si  $|\lambda| < 1$ , existe un conjunto fundamental  $U \subseteq \mathbb{D}$  donde las aplicaciones  $\varphi$  y  $\sigma$  son univalentes. En dicho dominio, tenemos que  $\varphi = \sigma^{-1}(\lambda\sigma)$

*Proof.* Si  $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ , entonces  $\varphi$  es una rotación y es suficiente tomar  $\sigma$  la aplicación identidad.

Supongamos de esta manera que  $0 < |\lambda| < 1$ . La función  $z \mapsto \frac{\varphi(z)}{z}$  es analítica en el disco unidad, está acotada por 1 y su valor en cero es  $\lambda$ . Por consiguiente, la función  $h(z) = \frac{\varphi(z)}{\lambda z} - 1$  es analítica en el disco unidad y verifica que  $h(0) = 0$  y  $|h(z)| \leq \frac{1}{|\lambda|} + 1 < \frac{2}{|\lambda|}$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Aplicando de nuevo el lema de Schwarz tenemos que  $|h(z)| \leq \frac{2}{|\lambda|}|z|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Llamemos  $g^n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\lambda^n}$ . Es claro que

$$(6.1) \quad g^{n+1}(z) = \frac{\varphi(\varphi_n(z))}{\lambda^{n+1}} = (h(\varphi_n(z)) + 1)g^n(z).$$

Fijemos ahora  $r < 1$ . Por el teorema de Denjoy-Wolff, fijado  $\varepsilon > 0$ , existe  $m = m(r, \varepsilon)$  tal que  $|\varphi_n(z)| < \varepsilon$  para todo  $|z| \leq r$ . Por tanto,

$$|g^{n+1}(z)| = |h(\varphi_n(z)) + 1||g^n(z)| \leq \left(\frac{2\varepsilon}{|\lambda|} + 1\right) |g^n(z)|$$

para  $n \geq m$ .

Si  $n \geq m$ , se sigue que

$$|g^n(z)| \leq \left(\frac{2\varepsilon}{|\lambda|} + 1\right)^{n-m} |g^m(z)| \leq \frac{1}{|\lambda|^m} \left(\frac{2\varepsilon}{|\lambda|} + 1\right)^n$$

siempre que  $|z| \leq r$ . Además, para  $n \geq m$ , de la igualdad (6.1) y la desigualdad anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} |g^{n+1}(z) - g^n(z)| &= |h(\varphi_n(z))||g^n(z)| \leq \frac{2}{|\lambda|} |\varphi_n(z)||g^n(z)| = 2|\lambda|^{n-1} |g^n(z)|^2 \\ &\leq 2|\lambda|^{n-1} \frac{1}{|\lambda|^{2m}} \left(\frac{2\varepsilon}{|\lambda|} + 1\right)^{2n} = \frac{2}{|\lambda|^{2m+1}} q^n \end{aligned}$$

siendo  $q = \left(\frac{2\varepsilon}{|\lambda|} + 1\right)^2 |\lambda|$ .

Tomando  $\varepsilon$  tal que  $q < 1$ , la serie  $\sum q^n$  es convergente y concluimos que existe el límite de  $g^n(z)$  uniformemente en el disco de centro cero y radio  $r$ .

La arbitrariedad de  $r$  permite definir la función analítica

$$\sigma(z) = \lim_n g^n(z) = \lim_n \frac{\varphi_n(z)}{\lambda^n},$$

donde el límite es en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Claramente  $\sigma(0) = 0$ ,  $\sigma'(0) = 1$  y

$$\sigma(\varphi(z)) = \lim_n \frac{\varphi_n(\varphi(z))}{\lambda^n} = \lambda \lim_n \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}} = \lambda\sigma(z).$$

Con esto ya hemos probado la existencia de  $\sigma$  verificando la ecuación de Schroeder.

Notemos  $r_0 = \frac{|\lambda|}{1 + \sqrt{1 - |\lambda|^2}}$ . Es bien conocido que  $\varphi$  es univalente en el disco  $U = \{z : |z| < r_0\}$ . Por otro lado, el lema de Schwarz garantiza que  $\varphi(U) \subseteq U$ . Además, en este dominio la función  $\sigma$  es el límite en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de funciones univalentes, luego es univalente en  $U$  o constante. Puesto que  $\sigma'(0) = 1$ , la función  $\sigma$  no puede ser constante y obtenemos que es univalente.

Dejamos como ejercicio la unicidad.  $\square$

**Remark 6.1.** *Observemos que en el dominio  $U$ , tenemos que  $\varphi_n(z) = \sigma^{-1}(\lambda^n \sigma(z))$ . Luego el comportamiento de las iteradas "coincide" con las iteradas de la función  $z \mapsto \lambda z$ .*

**Remark 6.2.** *Si  $\varphi$  es univalente en el disco unidad, entonces  $\sigma$  también lo es.*

**Remark 6.3.** *Sea  $a = 1/2$  y consideramos la función  $\varphi(z) = z \frac{a-z}{1-az}$ . Se tiene que  $\varphi'(0) = a$  y resulta que  $\varphi'(z_0) = 0$  para  $z_0 = \frac{a}{1 + \sqrt{1-a^2}}$ . Este ejemplo muestra que en general no es posible reemplazar el radio del dominio  $U$  por un radio mayor en la demostración anterior.*

**Example 6.1.** *Consideremos la función  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  dada por  $\varphi(z) = 1 - (1-z)^\alpha$ , donde  $0 < \alpha < 1$ . Entonces,  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi'(0) = \alpha$ . Puede comprobarse que su función de Koenigs es  $\sigma(z) = \log \frac{1}{1-z}$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .*

Antes de terminar el caso elíptico es interesante observar que no hemos dicho nada para el caso en que la derivada en el punto de Denjoy-Wolff sea cero. En este caso, el modelo se busca como una solución de la ecuación de Böttcher y puede verse un estudio bastante detallado en el trabajo de Cowen [22].

**6.2. El caso hiperbólico.** En 1931, Valirón obtuvo un resultado similar al de Koenigs para funciones hiperbólicas. En este caso, el correspondiente resultado de unicidad fue obtenido por Bracci y Poggi-Corradini [13]. La prueba de la unicidad descansa sobre técnicas desarrolladas previamente por Cowen [21].

**Theorem 6.2.** *Sea  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  con punto de Denjoy-Wolff  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  tal que  $0 < \lambda := \varphi'(\tau) < 1$  (esto es,  $\varphi$  es hiperbólica), entonces existe una única aplicación  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$  con  $|\sigma(0)| = 1$  y*

$$\text{(Ec. de Schroeder)} \quad \sigma \circ \varphi = \frac{1}{\lambda} \sigma.$$

*También se verifica que  $\sigma \circ \varphi_n = \frac{1}{\lambda^n} \sigma$  para todo  $n$ . Además, existe un conjunto fundamental  $U \subseteq \mathbb{D}$  donde las aplicaciones  $\varphi$  y  $\sigma$  son univalentes. Adicionalmente, si  $z \in \mathbb{D}$ , entonces la sucesión  $\varphi_n(z)$  converge a  $\tau$  no tangencialmente, es decir, existe un ángulo de Stolz  $S$  con vértice en  $\tau$  tal que  $\varphi_n(z) \in S$  para  $n$  suficientemente grande.*

**6.3. Un paréntesis: el paso hiperbólico.** Fijemos  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  y  $z_0 \in \mathbb{D}$  y denotemos  $z_n = \varphi_n(z_0)$ . Tenemos que

$$\rho(z_n, z_{n+1}) = \rho(\varphi(z_{n-1}), \varphi(z_n)) \leq \rho(z_{n-1}, z_n).$$

Es decir, la sucesión  $\rho(z_n, z_{n+1})$  es decreciente. Por tanto, siempre existe  $\lim_n \rho(z_n, z_{n+1})$  y pertenece a  $[0, +\infty)$ .

Es inmediato que si  $\varphi$  es elíptica y no es un automorfismo con punto fijo  $\tau \in \mathbb{D}$ , entonces  $\lim_n \rho(z_n, z_{n+1}) = \rho(\tau, \tau) = 0$ . No es tan elemental pero puede probarse que si  $\varphi$  es hiperbólica entonces  $\lim_n \rho(z_n, z_{n+1}) > 0$  para cualquier punto inicial  $z_0$ .

La situación es radicalmente distinta si consideramos funciones parabólicas. Una función parabólica  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  se dice que es de *paso hiperbólico cero* si para algún  $z_0 \in \mathbb{D}$ ,

$$\lim_n \rho(z_n, z_{n+1}) = 0,$$

donde  $z_n = \varphi_n(z_0)$ . En esta definición la palabra "algún" puede ser reemplazada por "todo", es decir, este concepto no depende del punto inicial  $z_0$ . Si  $\varphi$  no es de paso hiperbólico cero, para cada  $z_0 \in \mathbb{D}$ , se tiene que

$$\lim_n \rho(z_n, z_{n+1}) > 0.$$

Por esta razón a las funciones que no son de paso hiperbólico cero las llamaremos de *paso hiperbólico positivo*.

En muchas situaciones no es fácil distinguir si una función es de paso hiperbólico cero o positivo. Puede probarse que si  $\varphi$  es parabólica de paso hiperbólico positivo entonces  $z_n$  converge al punto de Denjoy-Wolff tangencialmente. Así si  $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  es parabólica con  $a_n \in \mathbb{R}$  para todo  $n$ , entonces  $\varphi$  es de paso hiperbólico cero.

Es claro que si  $\varphi$  es un automorfismo del disco unidad entonces es de paso hiperbólico positivo (ya que  $\rho(z_n, z_{n+1}) = \rho(z_{n-1}, z_n)$  para todo  $n$ ). Por el contrario, puede probarse que si  $\varphi$  es una transformación de Möbius parabólica que no es un automorfismo del disco unidad, entonces es de paso hiperbólico cero.

**6.4. El caso parabólico.** Sin duda damos ahora un gran salto en el tiempo. Tras el resultado de Valirón, durante más de 50 años el problema de encontrar un modelo para el caso parabólico fue un estimulante problema que finalmente fue resuelto en dos etapas en el año 1979. En primer lugar Pommerenke [48] probó el resultado para funciones de paso hiperbólico positivo y, posteriormente, Baker y Pommerenke [7] obtuvieron el modelo para funciones de paso hiperbólico cero. En ambos casos, fue probado que si  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  tiene un punto fijo frontera  $\tau \in \partial\mathbb{D}$  con  $\varphi'(\tau) = 1$ , entonces existe una aplicación analítica  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$\text{(Ec. de Abel)} \quad \sigma \circ \varphi = \sigma + 1.$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de Abel. En general, para funciones de paso hiperbólico cero nada más puede afirmarse sobre el rango de  $\sigma$ . Sin embargo, para funciones de paso hiperbólico positivo, la función  $\sigma$  que Pommerenke construyó tiene su rango contenido en un semiplano horizontal. Más adelante veremos que, de hecho, esta propiedad caracteriza el paso hiperbólico.

El siguiente resultado se debe esencialmente a Baker y Pommerenke aunque en la forma que se establece aquí aparece en [18, Theorem 2.2].

**Theorem 6.3.** *Sea  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  una función parabólica y consideremos una órbita  $(z_n) := (\varphi_n(z_0))$  de  $\varphi$ . Definamos  $\psi_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  mediante*

$$\psi_n(z) := \frac{\varphi_n(z) - z_n}{z_{n+1} - z_n}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

*Entonces  $(\psi_n)$  es una sucesión de funciones bien definidas analíticas en  $\mathbb{D}$  que converge en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos a una aplicación analítica  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\sigma(z_0) = 0$  y*

$$\text{(Ec. de Abel)} \quad \sigma \circ \varphi = \sigma + 1.$$

Además, existe un conjunto fundamental  $V$  para  $\varphi$  donde  $\varphi$  y  $\sigma$  son univalentes y, para cada  $r > 0$ , existe un número natural  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$ , el disco hiperbólico centrado en  $z_n$  y de radio  $r$  está contenido en  $V$ .

En lo que sigue, la función  $\sigma$  mencionada en el teorema anterior será llamada la aplicación de Koenigs con respecto a  $z_0$  asociada con  $\varphi$ .

6.4.1. *Paso hiperbólico cero.* El siguiente resultado muestra que cuando el paso hiperbólico es cero, hay una única solución que es univalente "alrededor" del punto de Denjoy-Wolff de la ecuación de Abel, justo como en los casos elípticos e hiperbólicos.

**Theorem 6.4.** [18, Theorem 3.1] *Sea  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  parabólica de paso hiperbólico cero y  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  su función de Koenigs con respecto a  $z_0 \in \mathbb{D}$ . Sea también  $\varkappa : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación analítica que sea solución de la ecuación de Abel  $\varkappa \circ \varphi = \varkappa + 1$ . Entonces existe una constante  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\varkappa = \sigma + \lambda$  si, y sólo si, existe un  $r > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\varkappa$  es univalente sobre cada disco hiperbólico de centro  $\varphi_n(z_0)$  y radio  $r$  para toda  $n > N$ .*

Un resultado similar a éste, pero con un requerimiento de univalencia ligeramente diferente, puede verse en [44]. Además, en este trabajo, Poggi-Corradini probó el siguiente resultado.

**Proposition 6.5.** [44, Proposition 7.5] *Sea  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  parabólica de paso hiperbólico cero y  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  su función de Koenigs con respecto a  $z_0 \in \mathbb{D}$ . Si  $\varkappa \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$  satisface la ecuación de Abel*

$$\varkappa \circ \varphi = \varkappa + 1,$$

entonces existe una función entera  $F$  tal que  $\varkappa = F \circ \sigma$  y

$$F(w + 1) = F(w) + 1, \text{ para todo } w \in \mathbb{C}.$$

6.4.2. *Paso hiperbólico positivo.* En este caso hay que decir que se pueden encontrar muchas soluciones de la ecuación de Abel con buenas propiedades. Veamos un ejemplo.

Consideremos el automorfismo parabólico del disco unidad dado por  $\varphi(z) = \frac{(2i-1)z+1}{2i+1-z}$ .

Su punto de Denjoy-Wolff es 1. Tomemos  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \Pi = \{w : \text{Im } w > 0\}$  dada por  $\sigma(z) = \frac{1+z}{1-z}i$ . Se comprueba que  $\sigma \circ \varphi = \sigma + 1$ . Por [24, Ejercicio 2.4.14], existe una aplicación univalente y sobreyectiva  $F : \Pi \rightarrow \Omega$  tal que  $F(w + 1) = F(w) + 1$  siendo

$$\Omega = \{w \in \Pi : w \neq n + iy \text{ para } 0 < y \leq 1 \text{ y } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Obviamente la función  $\varkappa = F \circ \sigma$  es univalente en el disco unidad y verifica que  $\varkappa \circ \varphi = \varkappa + 1$ . Sin embargo, no existe una transformación de Möbius  $\Phi$  tal que  $\Phi \circ \sigma$  sea igual a  $\varkappa$ . Es decir, desde nuestro punto de vista  $\sigma$  y  $\varkappa$  son dos soluciones de la ecuación de Abel realmente distintas. Esto se puede generalizar al siguiente resultado

**Proposition 6.6.** [18, Proposition 3.2] *Sea  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  parabólica y sea  $V$  el conjunto fundamental asociado a  $\varphi$  construido en el Teorema 6.3. Sea  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  su función de Koenigs con respecto a un punto  $z_0 \in \mathbb{D}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) *La aplicación  $\varphi$  es de paso hiperbólico positivo.*
- (2) *El rango de  $\sigma$  está contenido en un semiplano horizontal.*
- (3) *Hay una solución de la ecuación de Abel que es "muy" diferente de  $\sigma$  y con buenas propiedades de univalencia. Más precisamente, existe una función analítica  $\varkappa : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  con las siguientes tres propiedades:*
  - (a) *La función  $\varkappa$  satisface la ecuación  $\varkappa \circ \varphi = \varkappa + 1$ .*

- (b) La función  $\varkappa$  es univalente en el conjunto fundamental  $V$ .
- (c) No existe una aplicación lineal fraccional  $\Phi$  tal que  $\Phi \circ \sigma = \varkappa$ .

**6.5. Algunas aplicaciones de la teoría de modelos.** Usualmente, la función de Koenigs  $\sigma$  es difícil de calcular de forma explícita incluso para ejemplos de funciones sencillas  $\varphi$ . La razón es que  $\sigma$  tiene toda la información dinámica tanto de la función inicial  $\varphi$  como de todas sus iteradas y éstas son cada vez más complicadas. Piénsese en el producto de Blaschke de orden dos (véase la última sección del curso para una definición)  $\varphi(z) = \frac{3z^2 + 1}{z^2 + 3}$  (su punto de Denjoy-Wolff es 1 y es una función parabólica con paso hiperbólico cero). Sin embargo sus iteradas se complican cada vez más:  $\varphi_n$  es un producto de Blaschke de orden  $2^n$ .

A pesar de ello se pueden citar muchas aplicaciones de la teoría de modelos incluso fuera de la propia Dinámica Compleja. Por ejemplo, la existencia de la función de Koenigs es la piedra angular en el estudio de las propiedades espectrales y de ciclicidad de los operadores de composición en espacios de Hardy. La clave está en que si  $\varphi$  es elíptica y su la función de Koenigs está en un espacio de Hardy entonces es una autofunción y la derivada su autovalor. Este tipo de aplicaciones puede verse en la magnífica monografía de Shapiro [53] o en los trabajos de Poggi-Corradini de la segunda mitad de los años 90. En teoría de ramificación, como la mostrada en el modelo de Galton-Watson del Ejemplo 5.1, la función de Koenigs es conocida como *medida estacionaria del modelo* y puede verse en [33].

Mostramos también un par de aplicaciones concretas que recientemente hemos obtenido en el seno del grupo que trabaja en Dinámica Compleja en la Universidad de Sevilla. La primera de ellas aparece en el trabajo conjunto con Díaz-Madrigal, Martín y Vukotic [17].

**Theorem 6.7.** *Sea  $\varphi$  una transformación de Möbius que lleva el disco unidad en sí mismo, que no es un automorfismo del disco y con punto de Denjoy-Wolff  $p$ . Sea  $f$  una autoaplicación holomorfa del disco unidad “conforme” en  $p$  y tal que*

$$f \circ \varphi = \psi \circ f$$

*para alguna transformación de Möbius  $\psi$  que lleva el disco en sí mismo. Entonces  $f$  es una transformación de Möbius.*

La segunda aplicación es una caracterización de los productos de Blaschke finitos que conmutan. El caso elíptico fue resuelto por Chalendar y Mortini en 2001. Posteriormente, Arteaga obtuvo una caracterización para productos de Blaschke sin puntos fijos en el disco unidad. Éste usaba técnicas de teoría ergódica. Lamentablemente sus técnicas no funcionan para funciones parabólicas con paso hiperbólico cero. Recientemente, en un trabajo conjunto con Basallote y Hernández-Mancera [8], hemos cerrado la prueba con el resultado que mostramos a continuación. Antes recordemos que un producto de Blaschke  $B$  con ceros en  $(z_n) \subset \mathbb{D}$  es una función de la forma

$$B(z) = \lambda \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

(usamos el convenio de que  $\frac{|z_n|}{z_n}$  se reemplaza por 1 si  $z_n = 0$ ) donde  $\lambda \in \partial\mathbb{D}$  y la sucesión de ceros  $(z_n)$  satisface la condición de Blaschke  $\sum_n (1 - |z_n|) < \infty$ . Esta condición garantiza la convergencia uniforme sobre compactos del anterior producto. Es decir,  $B$  es un producto adecuado de automorfismos conformes del disco unidad. Si sólo consideramos un número

finito de factores, obtenemos los llamados productos de Blaschke finitos. Los ceros de un producto de Blaschke (finito o no) son precisamente los puntos de la sucesión  $(z_n)$  teniendo en cuenta que la multiplicidad de cualquier cero se refleja en el número de veces que se repite en la sucesión.

**Theorem 6.8.** *Sean  $\varphi$  y  $\psi$  dos productos de Blaschke finitos tal que el punto de Denjoy-Wolff de  $\varphi$  está en la frontera del disco unidad. Entonces las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  conmutan si, y sólo si, existen dos números naturales  $n$  y  $m$  tales que  $\varphi_n = \psi_m$ .*

## 7. COMPORTAMIENTO DE LAS ITERADAS EN LA FRONTERA

**7.1. Convergencia en la frontera al punto de Denjoy-Wolff.** Con el teorema de Denjoy-Wolff hemos obtenido mucha información sobre la sucesión  $(\varphi_n(z))$  cuando  $z \in \mathbb{D}$ , pero ¿qué ocurre con la sucesión  $(\varphi_n(\xi))$  cuando  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ ? Obviamente esta pregunta debe ser matizada y explicada. La primera cuestión es si tiene sentido hablar de  $\varphi_n(\xi)$  cuando  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ . Viene en nuestra ayuda el siguiente teorema de Fatou:

**Theorem 7.1.** *Sea  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  una función analítica. Entonces el límite angular*

$$\varphi(\xi) := \angle \lim_{z \rightarrow \xi} \varphi(z) \in \overline{\mathbb{D}}$$

*existe para casi todo  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ . Además, la función*

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \partial\mathbb{D} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{D}} \\ \xi & \longmapsto & \varphi(\xi) \end{array}$$

*es medible.*

Un concepto íntimamente ligado a este resultado es el de función interna: Una autoaplicación analítica del disco unidad  $\varphi$  se dice que es interna si

$$\varphi(\xi) := \angle \lim_{z \rightarrow \xi} \varphi(z) \in \partial\mathbb{D}$$

para casi todo  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ .

Volviendo a la iteración, a la vista del anterior teorema existe un conjunto  $A$  de medida cero tal que  $\varphi_n(\xi) := \angle \lim_{z \rightarrow \xi} \varphi_n(z)$  existe para todo  $\xi \in \partial\mathbb{D} \setminus A$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Luego ya podemos reformular de forma más precisa nuestra anterior pregunta:

Sea  $\varphi$  una autoaplicación analítica del disco unidad con punto de Denjoy-Wolff  $\tau \in \overline{\mathbb{D}}$ . ¿Es cierto que  $(\varphi_n(\xi))$  converge a  $\tau$  para casi todo  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ ?

Obviamente la respuesta en general es no y el ejemplo más simple viene dado por la función  $\varphi(z) = z^2$  cuyo punto de Denjoy-Wolff es cero pero si tomamos  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ , entonces  $|\varphi_n(\xi)| = 1$ . Luego si  $\xi$  está en la frontera del disco unidad, tenemos que  $(\varphi_n(\xi))$  no puede converger a 0.

En cualquier caso, en los últimos años este problema ha sido ampliamente estudiado y hoy en día podemos dar mucha información sobre la convergencia en la frontera. Empecemos por mostrar la respuesta en el caso elíptico. Ésta fue obtenida en 2005 por Bourdon, Matache y Shapiro e, independientemente, por Poggi-Corradini.

**Theorem 7.2.** [10] [45] *Sea  $\varphi$  una autoaplicación elíptica del disco unidad  $\mathbb{D}$  distinta de la identidad. Entonces  $(\varphi_n(\xi))$  converge al punto de Denjoy-Wolff de  $\varphi$  para casi todo  $\xi \in \partial\mathbb{D}$  si y sólo si  $\varphi$  no es una función interna.*

*Proof.* Reproducimos la demostración de Bourdon, Matache y Shapiro basada en resultados de teoría de operadores.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el punto de Denjoy-Wolff es cero. Consideremos el espacio de Hilbert  $H^2 = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\partial\mathbb{D}} |f(\xi)|^2 dm < +\infty\}$ , donde  $m$  denota la medida de Lebesgue normalizada en  $\partial\mathbb{D}$  y su subespacio  $X = \{g \in H^2 : g(0) = 0\}$ . El principio de subordinación de Littlewood garantiza que el operador de composición  $C_\varphi : X \rightarrow X$ , dado por  $C_\varphi(g) = g \circ \varphi$  para todo  $g \in X$ , es continuo. Además, Shapiro probó que si  $\varphi$  no es interna y fija el punto cero entonces  $M := \|C_\varphi\|_X < 1$  (esta desigualdad puede verse en [54, Theorem 5.1]). Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbb{D}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2 \right) dm &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial\mathbb{D}} |\varphi_n|^2 dm \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|C_\varphi \circ \dots \circ C_\varphi(Id)\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} M^{2n} < \infty. \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(\xi)|^2 < \infty$  para casi todo  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ , lo que implica que  $\varphi_n(\xi)$  converge a cero en casi todo punto  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ .

El recíproco es inmediato.  $\square$

Cuando el punto de Denjoy-Wolff está en la frontera tenemos el siguiente resultado que también se debe a Bourdon, Matache y Shapiro e, independientemente, a Poggi-Corradini.

**Theorem 7.3.** [10] [45] *Sea  $\varphi$  una autoaplicación del disco unidad  $\mathbb{D}$  con punto de Denjoy-Wolff en la frontera del disco unidad y de paso hiperbólico positivo (esto incluye a todas las funciones hiperbólicas y a parte de las parabólicas). Entonces  $(\varphi_n(\xi))$  converge al punto de Denjoy-Wolff de  $\varphi$  para casi todo  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ .*

Queda por abordar el caso que tradicionalmente es más complicado: las funciones parabólicas con paso hiperbólico cero. Al igual que el caso elíptico, la respuesta depende de si la función es interna o no lo es. Si es interna, la convergencia en la frontera depende de la velocidad con la que lo hace en el interior. Concretamente tenemos lo siguiente.

**Theorem 7.4.** [10, Theorem 4.2] *Sea  $\varphi$  una función parabólica interna de paso hiperbólico cero. Entonces  $(\varphi_n(\xi))$  converge al punto de Denjoy-Wolff de  $\varphi$  para casi todo  $\xi \in \partial\mathbb{D}$  si y sólo si existe un (o, equivalentemente, para todo)  $z \in \mathbb{D}$  tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\varphi_n(z)|) < +\infty.$$

En [19] puede verse el que, hasta donde sabemos, es el único resultado para funciones parabólicas de paso hiperbólico cero. Este resultado da una condición necesaria para la convergencia en términos del “tamaño” del rango de la función de Koenigs.

**Theorem 7.5.** [19] *Sea  $\varphi$  una función parabólica de paso hiperbólico cero. Supongamos que la función de Koenigs  $\sigma$  tiene límite angular en casi todo punto de  $\partial\mathbb{D}$ , entonces  $(\varphi_n(\xi))$  converge al punto de Denjoy-Wolff de  $\varphi$  para casi todo  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ .*

La hipótesis sobre  $\sigma$  en el resultado anterior es muy general y se satisface en los siguientes casos:

- Si  $\sigma$  pertenece a algún espacio de Hardy. Esta propiedad ha sido muy estudiada en la literatura y mención especial merecen los trabajos de Poggi-Corradini de los años 90.

- Si el conjunto  $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathbb{D})$  tiene capacidad logarítmica positiva. Esta propiedad se satisface si, por ejemplo,  $\sigma$  omite un continuo como sucede cuando  $\varphi$  es univalente.

**Conjecture 7.6.** *Sea  $\varphi$  una función parabólica de paso hiperbólico cero que no es interna. Entonces  $(\varphi_n(\xi))$  converge al punto de Denjoy-Wolff de  $\varphi$  para casi todo  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ .*

**7.2. Comportamiento cuando no hay convergencia. Productos de Blaschke.** En la subsección anterior nos hemos planteado si hay convergencia al punto de Denjoy-Wolff en la frontera del disco unidad. Hemos visto situaciones donde sí las hay y otras donde no. Pero, ¿qué ocurre cuando no hay convergencia a dicho punto? Todos los ejemplos conocidos donde no la hay son funciones internas. Dedicamos a ellas esta parte final del curso.

Una de las clases fundamentales de ejemplos en teoría de funciones es la formada por las funciones internas que ya han aparecido. Recordemos de nuevo que este tipo de funciones son exactamente aquellas autoaplicaciones del disco unidad cuyos límites radiales tienen módulo uno en casi todo  $\partial\mathbb{D}$ . Indudablemente, su relevante papel en la teoría se debe en gran parte al teorema de factorización interior-exterior que, entre otras cosas, afirma que hay dos tipos básicos de funciones internas: funciones internas singulares y los productos de Blaschke.

Desde el punto de vista de la iteración, las funciones internas generales pueden ser reducidas a productos de Blaschke usando el siguiente teorema de Frostman [53]:

**Theorem 7.7.** *Sea  $\varphi$  una función interna. Entonces  $\sigma_\zeta \circ \varphi$  es un producto de Blaschke para todo  $\zeta$  excepto posiblemente para un conjunto de capacidad logarítmica cero.*

Ahora bien, si  $\sigma_\zeta \circ \varphi$  es un producto de Blaschke, entonces  $\psi = \sigma_\zeta \circ \varphi \circ \sigma_\zeta$  también lo es y sus iteradas satisfacen  $\psi_n = \sigma_\zeta \circ \varphi_n \circ \sigma_\zeta$ . De esta forma las propiedades de  $\varphi_n$  y  $\psi_n$  son esencialmente las mismas en lo que concierne a la iteración. Esto hace que nos podamos centrar en los productos de Blaschke.

La primera cuestión es distinguir entre el caso parabólico e hiperbólico. La respuesta se debe a Frostman (ver además el trabajo de Ahern y Clark [6, Theorem 2]).

**Theorem 7.8.** *Sea  $B$  un producto de Blaschke con ceros  $(z_n)$  y tal que 1 es su punto de Denjoy-Wolff. Entonces*

$$B'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - |z_n|^2}{|1 - z_n|^2}.$$

En particular,  $B$  es parabólico si, y sólo si,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - |z_n|^2}{|1 - z_n|^2} = 1.$$

Una vez que tenemos determinado cuándo el producto de Blaschke es parabólico, para analizar su comportamiento en la frontera es clave distinguir su paso hiperbólico. Para productos de Blaschke finitos, el paso hiperbólico puede caracterizarse en términos de la derivada segunda (nótese que en este caso la función es analítica más allá del disco unidad y, por tanto, podemos derivar dos veces):

**Proposition 7.9.** *Sea  $B$  un producto de Blaschke finito con ceros  $(z_1, \dots, z_m)$  y con punto de Denjoy-Wolff 1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1)  $B$  es de paso hiperbólico cero.
- (2)  $B''(1) = 0$ .

(3) *Los ceros de  $B$  satisfacen*

$$\sum_{k=1}^m \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - z_k|^2} \operatorname{Im} z_k = 0.$$

Hasta donde nosotros sabemos, para productos de Blaschke infinitos, tenemos que introducir nociones de la teoría ergódica para caracterizar el paso hiperbólico.

Supongamos que  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  es un espacio de medida y consideremos una transformación medible  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  *no-singular*, es decir, tal que para cada conjunto medible  $A \in \Sigma$ , se verifica que  $\mu(T^{-1}(A)) = 0$  si, y sólo si,  $\mu(A) = 0$ . En este contexto se dice que  $T$  es una aplicación ergódica si, y sólo si, los únicos conjuntos  $T$ -invariantes (esto es,  $T^{-1}(A) = A \pmod{\mu}$ ) son los triviales, es decir, los que ellos o su complemento en  $\Omega$  tienen medida cero. Una forma más fuerte de ergodicidad viene dada por la exactitud. Concretamente, una transformación medible no-singular  $T$  decimos que es exacta si, y sólo si,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) = \{\emptyset, \Omega\}, \pmod{\mu} \text{ para cada } A \in \Sigma.$$

En nuestro contexto, el espacio de medida subyacente es la frontera del disco unidad  $\partial\mathbb{D}$  donde consideramos la medida de Lebesgue  $m$  sobre la familia de todos los subconjuntos de  $\partial\mathbb{D}$  medibles en el sentido de Borel. Además, en el contexto de funciones internas  $\varphi$ , podemos considerar la transformación medible  $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ .

El siguiente resultado (debido a Neuwirth [38] y Aaronson [1], [2], véase también [26, §3]) nos permite relacionar la teoría ergódica con la clasificación de autoaplicaciones analíticas desarrollada en este curso.

**Theorem 7.10.** *Una función interna es ergódica si y sólo si es exacta si y sólo si es de paso hiperbólico positivo.*

Si la función interna es elíptica se puede dar más información:

**Theorem 7.11** (Pommerenke). [51] *Existe una constante positiva  $K$  tal que si  $\varphi$  es una función interna que fija el cero y que no es un automorfismo,  $B$  es un arco en  $\partial\mathbb{D}$  y  $A$  es un conjunto medible de medida positiva, entonces*

$$\left| \frac{|B \cap \varphi^{-n}(A)|}{|A|} - |B| \right| \leq K e^{-\alpha n}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\alpha = \max\{1/2, |\varphi'(0)|\}$  y, dado un conjunto medible  $C$ ,  $|C|$  denota la medida de Lebesgue normalizada.

El anterior resultado muestra la medida del conjunto  $B \cap \varphi^{-n}(A) = \{\xi \in B : \varphi_n(\xi) \in A\}$  converge a  $|A||B|$ .

En trabajos recientes de J.L. Fernández, Melián y Pestana se continúa en la línea de cuantificar el comportamiento de las iteradas de una función interna elíptica (véase [29] y [30]). Citemos por ejemplo el siguiente resultado:

**Theorem 7.12** (Fernández-Melián-Pestana). *Sea  $\varphi$  una función elíptica e interna y que no es un automorfismo del disco unidad. Fijemos  $\xi_0 \in \partial\mathbb{D}$  y  $(r_n)$  una sucesión decreciente de números positivos.*

(1) *Si  $\sum r_n = +\infty$ , entonces*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d(\varphi_n(\xi), \xi_0)}{r_n} = 0 \quad \text{para casi todo } \xi \in \partial\mathbb{D}.$$

(2) Si  $\sum r_n < +\infty$ , entonces

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d(\varphi_n(\xi), \xi_0)}{r_n} = +\infty \quad \text{para casi todo } \xi \in \partial\mathbb{D}.$$

( $d$  denota la distancia angular en  $\partial\mathbb{D}$ ).

Este resultado ha sido mejorado posteriormente en [30] para productos de Blaschke finitos elípticos.

Una interesante línea de trabajo que relaciona ergodicidad, dinámica y funciones internas fue la iniciada por Hamilton en [32]. Por falta de tiempo nos vemos obligados a dejar al lector profundizar en ella.

Queremos finalizar planteando como problema abierto la veracidad de estos últimos resultados para productos de Blaschke finitos parabólicos de paso hiperbólico cero. ¿Son ciertos para funciones tan elementales como  $\varphi(z) = \frac{3z^2 + 1}{z^2 + 3}$  (composición del automorfismo  $z \mapsto \frac{3z + 1}{z + 3}$  con la función  $z \mapsto z^2$ )?

#### REFERENCES

- [1] J. Aaronson, *Ergodic theory for inner functions of the upper half plane*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.) **14** (1978), 233–253.
- [2] J. Aaronson, *A remark on the exactness of inner functions*, J. London Math. Soc. (2) **23** (1981), 469–474.
- [3] J. Aaronson, *An Introduction to Infinite Ergodic Theory*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [4] M. Abate, *Iteration Theory of Holomorphic Maps on Taut Manifolds*, Mediterranean Press, Rende, Cosenza, 1989.
- [5] M. Abate, *An introduction to local holomorphic dynamics in one complex variable*. In *Advanced courses of mathematical analysis III*, Eds. J.M. Delgado Sanchez and T.D. Benavides, World Scientific, Honk Kong, 2008, pp. 1–27. También disponible en <http://www.dm.unipi.it/~abate/>
- [6] P.R. Ahern y D.N. Clark, *On inner functions with  $H^p$ -derivative*, Michigan Math. J. **21** (1974), 115–127.
- [7] I. N. Baker y Ch. Pommerenke, *On the iteration of analytic functions in a half plane II*, J. London Math. Soc. (2) **20** (1979), 255–258.
- [8] M. Basallote, M.D. Contreras y C. Hernández-Mancera, *Commuting finite Blaschke products*. En preparación.
- [9] A.F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [10] P. S. Bourdon, V. Matache y J. H. Shapiro, *On convergence to the Denjoy-Wolff point*, Illinois J. Math. **49** (2005), 405–430.
- [11] P. S. Bourdon y J. H. Shapiro, *Cyclic Phenomena for Composition Operators*, Mem. Amer. Math. Soc. 569, Providence, 1997.
- [12] F. Bracci, M.D. Contreras y S. Díaz-Madrigal, *Infinitesimal generators associated with semigroups of linear fractional maps*, J. Anal. Math. **102** (2007), 119–142.
- [13] F. Bracci y P. Poggi-Corradini, *On Valiron's theorem*, Future Trends in Geometric Function Theory, RNC Workshop Jyvaskyla 2003, **92** (2003), 39–55.
- [14] D. M. Burns y S. G. Krantz, *Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 661–676.
- [15] R.B. Burckel, *Iterating analytic self-maps of discs*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), 396–406.
- [16] M.D. Contreras y S. Díaz-Madrigal, *Analytic flows on the unit disk: angular derivatives and boundary fixed points*, Pacific J. Math. **222** (2005) 253–286.
- [17] M.D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, M.J. Martín y D. Vukotic, *Holomorphic self-maps of the disk intertwining with linear fractional maps*, pendiente de aceptación.
- [18] M.D. Contreras, S. Díaz-Madrigal y Ch. Pommerenke, *Some remarks on the Abel equation in the unit disk*, J. London Math. Soc. **75** (2007), 623–634

- [19] M.D. Contreras, S. Díaz-Madrigo y Ch. Pommerenke, *Iteration in the unit disk: The parabolic zoo*. Proceedings of the Conference Complex and Harmonic Analysis celebrated in Thessaloniki, Greece, Destech Publications Inc. Editors: A. Carbery, P. L. Duren, D. Khavinson, and A. G. Siskakis, 2007.
- [20] M.D. Contreras, S. Díaz-Madrigo y Ch. Pommerenke, *Second angular derivatives and parabolic iteration in the unit disk*. Aparecerá en Trans. Amer. Math. Soc.
- [21] C. C. Cowen, *Iteration and solution of functional equations for functions analytic in the unit disk*, Trans. Amer. Math. Soc. **256** (1981), 69–95.
- [22] C.C. Cowen, *Analytic solutions of Böttcher's functional equation in the unit disk*, Aequationes Mathematicae **24** (1982), 187–194.
- [23] C.C. Cowen, *Composition operators on  $H^2$* , J. Operator Theory **9** (1983), 77–106.
- [24] C.C. Cowen y B. MacCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1995.
- [25] C.C. Cowen y Ch. Pommerenke, *Inequalities for the angular derivative of an analytic function in the unit disk*, J. London Math. Soc. (2) **26** (1982), 271–289.
- [26] C.I. Doering y R. Mañé, *The Dynamics of Inner Functions*, Ensaios Matemáticos, Vol. 3, 1991.
- [27] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Springer, New York, 1983.
- [28] M. P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. Soc. Math. France **47** (1919), 161–271.
- [29] J.L. Fernández, M.V. Melián y D. Pestana, *Quantitative mixing results and inner functions*, Math. Ann. **337** (2007) 233–251.
- [30] J.L. Fernández, M.V. Melián y D. Pestana, *Quantitative recurrence of expanding maps*. Pendiente de publicación.
- [31] W.W. Goryainov, *Koenigs function and fractional iterates of probability generating functions*, Sb. Math. **193** (2002), 1009–1025.
- [32] D. H. Hamilton, *Absolutely continuous conjugacies of Blaschke products*, Adv. Math. **121** (1996), 1–20.
- [33] T. Harris, *The Theory of Branching Processes*, Springer, Berlin, 1963.
- [34] H. Kesten, P. Ney y F. Spitzer, *The Galton-Watson process with mean one and finite variance*, Theor. Probability Appl. **11** (1966), 513–540.
- [35] D. Mejía y Ch. Pommerenke, *The analytic fixed point function in the disk*, Comput. Methods Funct. Theory **5** (2005), 275–299.
- [36] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Vieweg, 2000.
- [37] R. Nevanlinna, *Analytic Functions*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1970).
- [38] J. H. Neuwirth, *Ergodicity of some mappings of the circle and the line*, Israel J. Math. **31** (1974), 359–367.
- [39] P. Poggi-Corradini, *Hardy spaces and Twisted sectors for geometric models*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 2503–2518.
- [40] P. Poggi-Corradini, *The Hardy class of Koenigs maps*, Michigan Math. J. **44** (1997), 495–507.
- [41] P. Poggi-Corradini, *The Hardy class of geometric models and the essential spectral radius of composition operators*, J. Funct. Anal. **143** (1997) 129–156.
- [42] P. Poggi-Corradini, *Angular derivatives at boundary fixed points for self-maps of the disk*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 1697–1708.
- [43] P. Poggi-Corradini, *Backward-iteration sequences with bounded hyperbolic steps for analytic self-maps of the disk*, Rev. Mat. Iberoamericana (3) **19** (2003), 943–970.
- [44] P. Poggi-Corradini, *On the uniqueness of classical semiconjugations for self-maps of the disk*, Comput. Methods Funct. Theory **6** (2006) 403–421.
- [45] P. Poggi-Corradini, *Pointwise convergence on the boundary in the Denjoy-Wolff theorem*, aparecerá en Rocky Mountain Math. J.
- [46] Ch. Pommerenke, *Estimates for normal meromorphic functions*, Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A I, **476** (1970), 1–10.
- [47] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [48] Ch. Pommerenke, *On the iteration of analytic functions in a half plane I*, J. London Math. Soc. (2) **19** (1979), 439–447.
- [49] Ch. Pommerenke, *On the stationary measures of critical branching processes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie **55** (1981) 305–312.
- [50] Ch. Pommerenke, *On asymptotic iteration of analytic functions in the disk*, Analysis **1** (1981), 45–61.
- [51] Ch. Pommerenke, *On ergodic properties of inner functions*, Math. Ann. **256** (1981), 43–50.

- [52] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [53] J. H. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [54] J. H. Shapiro, *What do composition operators know about inner functions?* Monatshefte für Mathematik **130** (2000), 57–70.
- [55] D. Shoikhet, *Semigroups in Geometrical Function Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [56] N. Steinmetz, *Rational Iteration, Complex Analytic Dynamical Systems*, Walter de Gruyter, Berlin, 1993.
- [57] R. Tauraso, *Commuting holomorphic self-maps of the unit disc*, Ergodic Theory Dynam. Systems **24** (2004), 945-953.
- [58] R. Tauraso y F. Vlacci, *Rigidity at the boundary for holomorphic self-maps of the unit disk*, Complex Variables Theory Appl. **45** (2001), 151–165.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
E-mail address: `contreras@us.es`