

Universidad Carlos III de Madrid
Programa de Doctorado en Ingeniería Matemática
Departamento de Matemáticas
Tesis doctoral para la obtención del título de Doctor en Ingeniería Matemática



Título: HIPERBOLICIDAD DE GRAFOS EN SENTIDO DE GROMOV

Autor: Junior Michel

Director: José Manuel Rodríguez García

A Dios, por darme salud y fuerza,
a mi familia,
y en particular a mi esposa Estine Pierre y a mi futuro hijo que está por nacer.

Agradecimientos

Para mí, escribir y leer una tesis doctoral era un sueño; un sueño que está a punto de convertirse en realidad gracias a la ayuda de mucha gente a la que estoy profundamente agradecido.

El primer y principal agradecimiento va dirigido a mi director de tesis José Manuel Rodríguez García, quien a pesar de otras muchas ocupaciones se comprometió y trabajó intensamente para sacar esta tesis adelante; él me ayudó a superar todos los obstáculos por difíciles que fueran. Sé que siempre puedo contar con él.

En segundo lugar es obligado citar a José María Sigarreta, quien no solamente figura como colaborador en este trabajo, sino que lo siguió muy de cerca y mostró la misma diligencia, habilidad y paciencia para que pudiéramos lograr este objetivo. Agradecimiento también a la otra colaboradora de este trabajo, María Villeta, en la Universidad Complutense de Madrid.

En tercer lugar, también quiero agradecer a Domingo Pestana Galván y María Victoria Melián (en la Universidad Autónoma de Madrid), quienes me han mostrado una gran generosidad para aconsejarme siempre que hiciera falta.

En cuarto lugar, desde el punto vista personal, el primer agradecimiento va por supuesto para mi familia, empezando por mi esposa Estine Pierre, mi padre Euspetuel Michel, mi madrina Victorieuse Louis, mis hermanos Jean Wilfride Michel, Jude Michel y mi hermana Kelita Michel, y mis tíos y tías. Siempre me apoyan incondicionalmente para enfrentar y superar todos los obstáculos.

En quinto lugar, un agradecimiento especial a todos los profesores del Departamento de Matemáticas, especialmente a Guillermo López Lagomasino y a Francisco Marcellán Español, por darme la oportunidad de dedicarme a la investigación gracias a la beca de la que he disfrutado estos últimos años.

Finalmente, mención aparte merecen también mis compañeros de despacho, Jean-Marie Vilaire, Edmundo J. Huertas Cejudo, Jorge A. Borrego Morell y Johan A. Ceballos C., por la considerable ayuda científica y matemática, tanto en docencia como en investigación, que me han prestado. También, quiero agradecer a mis amigos Jean-Marie Vilaire, Cacoq Junot, Calixte Luckenson, Esdras Joseph y Anier Soria Lorente por sus consejos y amistad.

Si me olvido de mencionar a alguien explícitamente y esa persona no sabe si se cuenta entre la gente a la que debo agradecimientos, que me perdone en primer lugar y que tenga por seguro que estoy agradecido.

“En la matemática no encuentro ninguna imperfección, excepto quizá en el hecho de que los hombres no comprenden de manera suficiente el excelente uso de la Matemática Pura”.

Francis Bacon.

Índice

Introducción	7
Estructura de la tesis	10
1 Conceptos y propiedades de la teoría de grafos	12
1.1 Grafos y algunas propiedades	12
1.2 Producto cartesiano de grafos	28
2 Conceptos y propiedades fundamentales de los espacios hiperbólicos	34
2.1 Espacios de Gromov	34
2.2 Demostraciones de algunos de los resultados básicos	42
3 Hiperbolicidad de Gromov en grafos	46
3.1 Hiperbolicidad y parámetros de grafos	46
3.1.1 Relaciones entre la constante de hiperbolicidad y ciclos de grafos	47
3.1.2 Constante de hiperbolicidad y cuello de un grafo	52
3.1.3 Relaciones entre la constante de hiperbolicidad, aristas y orden de un grafo	57
3.2 Hiperbolicidad en grafos producto cartesiano	61
3.2.1 La distancia en grafos producto	61
3.2.2 Cotas para la constante de hiperbolicidad en grafos producto	66
3.2.3 Cálculo de la constante de hiperbolicidad para algunos grafos producto	71
Conclusiones	75
Problemas abiertos y futuros trabajos	76
Bibliografía	78

Resumen

Si X es un espacio métrico geodésico y $x_1, x_2, x_3 \in X$, un *triángulo geodésico* $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ es la unión de tres geodésicas $[x_1x_2]$, $[x_2x_3]$ y $[x_3x_1]$ en X . El espacio X es δ -hiperbólico (en sentido de Gromov) si cualquier lado del triángulo T está contenido en un δ -entorno de la unión de otros dos lados, para cada triángulo geodésico T en X , es decir, si para toda permutación $\{i, j, k\}$ de $\{1, 2, 3\}$ y para todo $u \in [x_ix_j]$ se verifica $d(u, [x_jx_k] \cup [x_ix_k]) \leq \delta$. Denotamos por $\delta(X)$ la constante de hiperbolicidad optimal de X , es decir, $\delta(X) := \inf\{\delta \geq 0 : X \text{ es } \delta\text{-hiperbólico}\}$. Esta tesis se enmarca dentro del estudio de las propiedades de los grafos hiperbólicos de Gromov, y forma parte de un amplio proyecto que involucra a numerosos investigadores de diversas universidades que trabajan en este mismo tema. Los resultados de esta tesis se presentan en dos secciones, en el tercer capítulo.

En la primera de ellas relacionamos la constante de hiperbolicidad de un grafo con algunos parámetros del mismo grafo, como el cuello, el número de vértices y el diámetro: en particular, si g denota el cuello (el ínfimo de las longitudes de los ciclos del grafo), probamos que $\delta(G) \geq g(G)/4$ para todo grafo (finito o infinito, posiblemente con aristas múltiples y/o bucles); si G es un grafo con n vértices y aristas de longitud k (posiblemente con aristas múltiples y/o bucles), entonces $\delta(G) \leq nk/4$. Además, demostramos que ambas desigualdades son óptimas: encontramos una gran familia de grafos para la cual la primera desigualdad es de hecho una igualdad; además, caracterizamos el conjunto de grafos con $\delta(G) = nk/4$. También caracterizamos los grafos con aristas de longitud k con $\delta(G) < k$.

En la segunda sección estudiamos la hiperbolicidad de una clase especial de grafos, los grafos producto, obteniendo información valiosa sobre un grafo producto a partir de información sobre ambos factores. En particular, llegamos a caracterizar la hiperbolicidad del producto cartesiano de grafos: $G_1 \times G_2$ es hiperbólico si y sólo si uno de los factores es hiperbólico y el otro factor está acotado. También probamos algunas desigualdades optimales entre la constante de hiperbolicidad de $G_1 \times G_2$, $\delta(G_1)$, $\delta(G_2)$ y los diámetros de G_1 y G_2 (y encontramos familias de grafos para los que se alcanzan las igualdades). Además, obtenemos el valor exacto de la constante de hiperbolicidad para muchos grafos producto.

Introducción

El tema fundamental de esta tesis es el estudio de la hiperbolicidad de los grafos.

Según el contexto, la palabra hiperbolicidad puede hacer referencia a diferentes conceptos, tales como la existencia de curvas transversales sobre las que un sistema dinámico actúa (expandiendo o contrayendo), la existencia de función de Green o la curvatura negativa. Nosotros, a partir de ahora, siempre nos referiremos a la hiperbolicidad en sentido de Gromov. El estudio de grupos finitamente generados fue impulsado por la monografía de 1987 de Gromov [G1] que introdujo la noción de grupo hiperbólico, que captura la idea de un grupo finitamente generado “con curvatura negativa”, y por su posterior monografía [G2], que describe el programa de Gromov para la comprensión de los grupos discretos (módulo quasi-isometrías). El trabajo de Gromov tuvo un efecto transformador en el estudio de los grupos discretos y la expresión “teoría geométrica de grupos” comenzó a aparecer poco después (aunque los orígenes geométricos de la teoría fueron difuminándose en el tiempo, ya que muchos algebraistas “no confían demasiado” en la geometría).

Los temas notables y la evolución de la teoría geométrica de grupos entre 1987 y 2000 incluyen:

- El programa de Gromov para estudiar las propiedades de los grupos.
- El estudio de las propiedades que son invariantes bajo quasi-isometrías.
- La teoría de grupos hiperbólicos y grupos relativamente hiperbólicos.

Un desarrollo particularmente importante es el trabajo de Sela en la década de 1990 que dió como resultado la solución del problema del isomorfismo (el problema computacional que consiste en determinar si dos grafos son isomorfos) para grupos hiperbólicos (ver [Se]). La noción de grupo relativamente hiperbólico se introdujo originalmente por Gromov en 1987 y fue refinada por Farb y Bowditch, en la década de 1990. El estudio de grupos relativamente hiperbólicos ganó prominencia en la primera década del siglo *XXI*. La idea básica era explorar las conexiones entre las propiedades algebraicas abstractas de un grupo y las propiedades geométricas de un espacio en el cual este grupo actúa por isometrías. Esta conexión resulta ser especialmente fuerte cuando el espacio en cuestión tiene ciertas “características hiperbólicas”. Esto llevó a M. Gromov, así

como J. Cannon, a la noción de espacio hiperbólico. Estas ideas han causado una especie de revolución en el campo más general de la geometría y la teoría de grupos.

Aunque la hiperbolicidad de Gromov se puede definir en espacios métricos completamente generales, la mayoría de los investigadores, entre los que nos incluimos, han restringido su atención a espacios métricos geodésicos. Vamos a trabajar, por tanto, en el contexto de espacios métricos geodésicos, es decir, en los que para todo par de puntos x, y existe una geodésica que los une (una curva con longitud igual a $d(x, y)$). La hiperbolicidad ha permitido obtener en los últimos años resultados muy sorprendentes como, por ejemplo, la clasificación de las isometrías de los espacios hiperbólicos.

Aunque disponemos de ejemplos interesantes de espacios hiperbólicos, no existen criterios generales que permitan determinar si un espacio es o no hiperbólico.

En los últimos años, muchos investigadores han estado interesados en estudiar si las métricas utilizadas habitualmente en la teoría geométrica de funciones, son hiperbólicas. Por ejemplo, la \tilde{J} -métrica es hiperbólica siempre y la J -métrica en un abierto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es hiperbólica si y sólo si ∂X tiene exactamente un punto (ver [Ha]). También han sido publicados importantes resultados que tratan de determinar la hiperbolicidad de dominios acotados de \mathbb{R}^n con la métrica quasihiperbólica $ds := |dx|/d(x, \partial\Omega)$, donde $d(x, \partial\Omega)$ denota la distancia euclídea de $x \in \Omega$ a la frontera de Ω (ver [BB3], [BHK]). En particular, en el artículo de Balogh y Buckley en Inventiones [BB3] se da una caracterización de la hiperbolicidad para estos dominios, en términos de una “condición slice” que, aunque resulta complicada de utilizar en la práctica, supone una gran simplificación. También se ha abordado en diversos trabajos el problema de estudiar la hiperbolicidad de las superficies de Riemann con su métrica de Poincaré (ver [APRT], [HLPRT], [HPRT], [HPRT1], [HPRT2], [PRT1], [PRT2], [PRT3], [PRT4], [PT], [RT1], [RT2] y [RT3]).

Las aplicaciones de la hiperbolicidad de Gromov tradicionalmente vienen de la mano de la teoría de grafos. Además, la mayoría de los espacios métricos son equivalentes en cierto sentido (quasi-isométricos) a grafos. Por tanto, dado que la hiperbolicidad se preserva por quasi-isometrías, resulta de particular importancia entender en profundidad los grafos hiperbólicos. Los primeros trabajos sobre dichos grafos son precisamente los resultados clásicos de hiperbolicidad: recordemos que el principal objeto de estudio eran precisamente los grafos de Cayley asociados a grupos finitamente generados. Sin embargo, como es fácilmente imaginable, la mayoría de los resultados obtenidos eran de tipo algebraico y tenían muy poco que ver con la teoría de grafos. La razón que hay detrás de este hecho es que los grafos de Cayley constituyen una subclase de grafos muy rígida y restrictiva; por ejemplo, si añadimos o eliminamos una arista a un grafo de Cayley, el grafo resultante no es de Cayley.

Aunque desde estos primeros trabajos en los que se estudiaban grupos hiperbólicos ha habido numerosos artículos sobre hiperbolicidad en los que los grafos juegan un papel importante (ver, por ejemplo, [BHK], [BS],

[FS], [PRT1], [RT1], [RT3] y [T2]), puede considerarse que los primeros resultados sobre grafos hiperbólicos desde el punto de vista de la teoría de grafos aparecen publicados en 2001 y 2002 (ver [BKM] y [KM]).

En los años posteriores se han publicado algunos trabajos más sobre el tema, pero es en los tres últimos años cuando este tema ha atraído una gran atención dentro de la teoría de grafos (ver, por ejemplo, los numerosos trabajos citados en [ZW]).

Nuestro objetivo en esta tesis es estudiar la hiperbolicidad de grafos; más en concreto, queremos establecer relaciones de la constante de hiperbolicidad con otros parámetros del grafo y caracterizar la hiperbolicidad del producto cartesiano de grafos. En una primera fase de la investigación esperábamos caracterizar la hiperbolicidad del producto cartesiano de grafos en términos de la hiperbolicidad de los factores, pero resulta imposible caracterizarla de esa manera, ya que el producto de dos grafos hiperbólicos no siempre es hiperbólico; por ejemplo, el grafo de Cayley de \mathbb{Z} es hiperbólico (de hecho, es 0-hiperbólico), mientras que el de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no lo es. En el transcurso de nuestro trabajo pudimos encontrar la caracterización de la hiperbolicidad del grafo producto en términos de la hiperbolicidad de un factor y la acotación del otro factor; este Teorema se puede generalizar para una cantidad arbitraria de grafos: el producto cartesiano de n grafos es hiperbólico si y sólo si uno de los factores es hiperbólico y el resto de los factores están acotados.

Todo el capítulo 3 de la tesis expone detalladamente los resultados obtenidos en el transcurso de nuestra investigación. Otros artículos relacionados con este tema son [RSVV], [BRST], [BRSV1], [BRSV2] y [PRSV].

Los resultados de esta tesis han sido recogidos en los artículos [MRSV1] y [MRSV2], aceptado y publicado, respectivamente, en *Ars Combinatoria* y en *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, que son revistas internacionales que se incluyen en el JCR (Journal Citation Reports). Además, los principales resultados de esta tesis han sido dados a conocer mediante la presentación de comunicaciones y posters en diversos congresos nacionales e internacionales:

- COMPUMAT 2009, la Habana, Cuba, conferencia dada por María Villeta.
- Workshop of Young Researchers in Mathematics 2010, Madrid, conferencia dada por mí.
- Colloquium de la Universidad Autónoma de Guerrero 2010, Acapulco, México, conferencia dada por mí.
- XII Encuentros de Análisis Real y Complejo (EARCO) 2010, La Rioja, poster presentado por mí.

Estructura de la tesis

Esta memoria está estructurada en tres capítulos:

- (I) El primer capítulo se divide en dos secciones, una primera sección que se dedica al estudio de los grafos, y una segunda sección que se dedica al producto cartesiano de grafos y algunas de sus propiedades.
- (II) El segundo capítulo está dividido en dos secciones también, una primera que se dedica al estudio de los conceptos y propiedades fundamentales de los espacios hiperbólicos de Gromov y una segunda sección en la que se demuestran algunos de los resultados básicos.
Estas técnicas las vamos a usar en el capítulo 3 para poder obtener nuestros resultados.
- (III) El tercer y último capítulo incluye los resultados originales obtenidos en esta tesis. Se divide en dos secciones y cada sección tiene tres subsecciones.

La primera sección se dedica al estudio de la hiperbolicidad y su conexión con otras propiedades de los grafos. En ella relacionamos la constante de hiperbolicidad de un grafo con su orden, cuello, ciclos y aristas.

En particular, si g denota el cuello, probamos la desigualdad $\delta(G) \geq g(G)/4$ (ver el Teorema 3.1.15) para cada grafo G (finito o infinito, posiblemente con aristas múltiples y/o bucles); si G es un grafo de orden n y aristas de longitud k (posiblemente con aristas múltiples y/o bucles), entonces $\delta(G) \leq nk/4$ (ver el Teorema 3.1.28). Además, encontramos una extensa familia de grafos para la cual la primera desigualdad es en efecto una igualdad; también caracterizamos el conjunto de grafos que verifican $\delta(G) = nk/4$ (ver el Teorema 3.1.28). En el Teorema 3.1.9 caracterizamos los grafos con aristas de longitud k con $\delta(G) < k$.

En la segunda sección de este capítulo hacemos un estudio de la hiperbolicidad del producto cartesiano de grafos. En particular, caracterizamos la hiperbolicidad del producto cartesiano de grafos $G_1 \times G_2$ en términos de G_1 y G_2 : el producto cartesiano de dos grafos es hiperbólico si y sólo si uno de los factores es hiperbólico y el otro factor está acotado (ver el Teorema 3.2.19); este resultado se puede

generalizar para n grafos. También probamos algunas desigualdades optimales entre la constante de hiperbolicidad de $G_1 \times G_2$, G_1 , G_2 y los diámetros de G_1 y G_2 (y encontramos familias de grafos para las cuales se alcanzan las igualdades). Además, obtenemos el valor preciso de la constante de hiperbolicidad para muchos grafos producto (ver los Teoremas [3.2.22](#), [3.2.24](#), [3.2.25](#) y [3.2.26](#)).

Capítulo 1

Conceptos y propiedades de la teoría de grafos

1.1 Grafos y algunas propiedades

La teoría de grafos es un área muy popular de Matemática discreta con, no sólo numerosos desarrollos teóricos, sino también innumerables aplicaciones a problemas prácticos tales como:

- relación entre rutas y ciudades
- determinar tiempos máximos y mínimos de un determinado proceso, etc.

y, en particular, constituye el principal objeto de estudio de esta tesis.

Como área de investigación, la teoría de grafos es todavía relativamente reciente, pero está madurando rápidamente con muchos resultados profundos que se han descubierto en el último par de décadas. En esta ponencia trabajamos solamente con grafos no dirigidos (finitos e infinitos) y admitimos aristas múltiples y bucles (estos conceptos los definiremos más adelante). En este primer capítulo introduciremos los conceptos necesarios sobre grafos. En la sección 1.1 enunciaremos algunas propiedades de los grafos finitos, aunque en la sección 1.2 y en el tercer capítulo los grafos pueden ser finitos o infinitos.

Para el desarrollo de nuestro trabajo necesitamos considerar como puntos integrantes del grafo no sólo los vértices, sino también los puntos pertenecientes a las aristas. Por tanto, con respecto a la distancia en un grafo, tenemos en cuenta tanto la distancia entre dos vértices y como la distancia entre dos puntos cualesquiera (vértices o no) del grafo.

De una manera informal, podríamos decir que un grafo es una colección de vértices y de aristas que unen estos vértices. Vayamos con la definición formal:

Definición 1.1.1. Se denomina grafo G al par $(V(G), E(G))$, en el que $V(G)$ es un conjunto no vacío de elementos denominados vértices y $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de elementos de $V(G)$ denominados aristas.

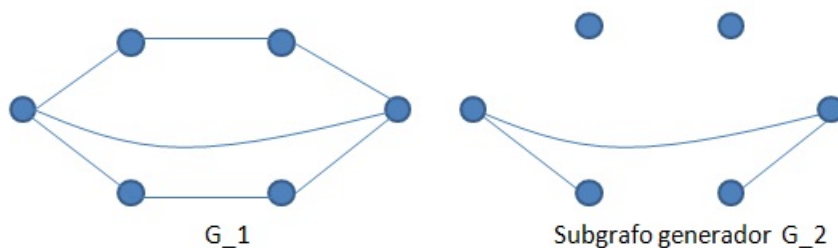
La terminología en teoría de grafos varía muchísimo: prácticamente no hay dos textos que adopten la misma terminología. En particular, los vértices de un grafo también reciben a veces el nombre de nodos, puntos y las aristas a veces se denominan arcos, ejes o líneas.

El número de vértices de un grafo G es su orden, y se escribe como $|V(G)|$; su número de aristas es su medida y se denota por $|E(G)|$. Los grafos pueden ser finitos, infinitos, numerables y así sucesivamente según el orden.

Un grafo G de orden 0 o 1 se llama trivial.

Una arista $\{u, v\}$ se escribe en general como $[u, v]$ o $[v, u]$.

Definición 1.1.2. Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ un grafo. Si $G_2 = (V_2, E_2)$ es un grafo tal que $V_2 \subseteq V_1$ y $E_2 \subseteq E_1$ decimos que G_2 es un subgrafo de G_1 . Si E_2 contiene todas las aristas de E_1 que unen a los puntos de V_2 en G_1 se dice que G_2 es un subgrafo de G_1 generado por V_2 . Si $V_2 = V_1$ decimos que G_2 es un subgrafo generador; en otras palabras, el subgrafo generador de G_1 se obtiene tomando como subconjunto de vértices el conjunto de vértices $V(G_1)$ de G_1 donde no es necesario que estén todas las aristas $E(G_1)$ de G_1 .

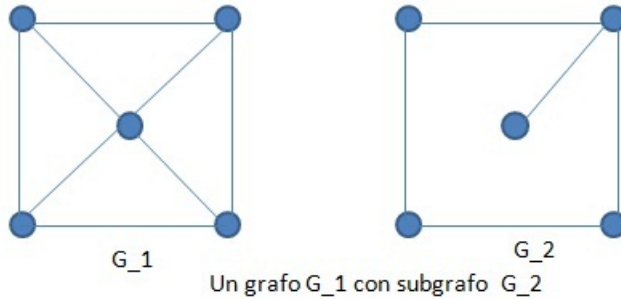


Sea $V_2 \subseteq V_1$; el subgrafo generado o inducido por V_2 , denotado por $G_1[V_2]$, es el grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ tal que

$$E_2 = \{[u, v] \in E_1 : u, v \in V_2\}.$$

En otras palabras, si seleccionamos un conjunto de vértices V_2 de G_1 y le agregamos todas las aristas que unen a dichos vértices en G_1 , obtendremos un subgrafo inducido.

En este ejemplo es fácil ver que G_2 no es un subgrafo inducido de G_1 .



Definición 1.1.3. Sea un grafo $G = (V, E)$; diremos que dos vértices $u, v \in V$ son vecinos si $[u, v] \in E$. El grado (o valencia) de un vértice es el número de vecinos que tiene en el grafo,

$$\text{grado de } v := gr(v) := \text{card} \{u \in V : [u, v] \in E\}.$$

El número $\rho(G) := \min \{gr(v) : v \in V\}$ es el grado mínimo de G , el número $\Delta(G) := \max \{gr(v) : v \in V\}$ es su grado máximo. Si $\rho(G) = \Delta(G)$, entonces el grafo es regular.

Si el grado de un vértice es 0, diremos que es un vértice aislado.

El grado promedio de G denotado por $gr(G)$ es

$$gr(G) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} gr(v).$$

El grado promedio de G cuantifica globalmente lo que mide el grado localmente: el número de aristas de G por vértices. A veces será conveniente expresar la razón entre las aristas y los vértices por: $\varepsilon(G) := |E|/|V|$. Es evidente que

$$\rho(G) \leq gr(G) \leq \Delta(G).$$

El grado promedio $gr(G)$ de G y $\varepsilon(G)$ están íntimamente relacionados. De hecho, si sumamos todos los grados de los vértices en G , contamos cada arista exactamente dos veces: una vez por cada uno de sus extremos. Por lo tanto,

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} gr(v) = \frac{1}{2} gr(G) \cdot |V|,$$

y por lo tanto,

$$\varepsilon(G) = \frac{1}{2} gr(G).$$

Proposición 1.1.4. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se verifica:

- a) La suma de todos los grados de sus vértices es igual al doble del número de sus aristas.
- b) El número de vértices de grado impar es par.

Si un grafo G tiene grado mínimo grande, es decir, en todas partes, a nivel local, hay muchas aristas por vértice, él tiene también varias aristas por vértice a nivel global: $\varepsilon(G) := \frac{1}{2}gr(G) \geq \frac{1}{2}\rho(G)$.

En la siguiente Proposición se muestra que cada grafo G tiene un subgrafo cuyo grado promedio no es menor que el grado promedio de G , y cuyo grado mínimo es mayor que la mitad de su grado promedio:

Proposición 1.1.5. *Cada grafo $G = (V, E)$ con al menos una arista tiene un subgrafo H con*

$$\rho(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G).$$

Definición 1.1.6. *Dos vértices u, v de un grafo $G = (V, E)$ se dicen adyacentes si $[u, v] \in E$; asimismo, dos aristas son adyacentes si tienen un vértice en común; análogamente, si $e = [u, v]$ decimos que la arista e es incidente a los vértices u y v .*

Pares de vértices o aristas no adyacentes se dicen independientes. Más formalmente, un conjunto de vértices o de aristas es independiente (o estable) si no tiene dos elementos adyacentes.

Definición 1.1.7. *Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos, con conjuntos de vértices y aristas (V_1, E_1) y (V_2, E_2) , respectivamente. Decimos que una aplicación biyectiva $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ es un isomorfismo de grafos si $[u, v] \in E_1 \Leftrightarrow [\phi(u), \phi(v)] \in E_2$ (es decir, si ϕ conserva las relaciones de vecindad entre vértices).*

Dos grafos G_1 y G_2 se dirán isomorfos (y se denota por $G_1 \cong G_2$) si existe un isomorfismo entre ellos.

No es fácil, en general, decidir si dos grafos son isomorfos o no. En los casos sencillos, si los dos grafos son isomorfos, se puede encontrar la biyección “a ojo”, sobre todo si el dibujo nos ayuda. Pero cuando sus conjuntos de vértices son grandes, no es fácil encontrar una biyección.

Sin embargo, para decidir que dos grafos no son isomorfos contamos con ciertas propiedades de un grafo que se han de conservar por isomorfismos:

- Ambos grafos han de tener el mismo número de vértices (si no lo tienen, no podremos construir una aplicación biyectiva entre los conjuntos de vértices).
- Cada vértice ha de mantener sus relaciones de vecindad. En particular, si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son dos grafos isomorfos mediante ϕ , entonces, para cada $u \in V_1$:

$$gr(u) = gr(\phi(u))$$

En efecto, como ϕ es una biyección que conserva la adyacencia, el número de vértices adyacentes a u en G_1 ha de ser el mismo que el de vértices adyacentes a $\phi(u)$ en G_2 ; por lo tanto, el número de aristas con extremo en u ha de coincidir con el número de aristas con extremo en $\phi(u)$ y, consecuentemente, sus grados serán iguales.

Si, por ejemplo, en un grafo tenemos un vértice de grado 7 y en el otro no, no podrán ser isomorfos.

- Con más generalidad, si dos grafos son isomorfos, entonces han de tener la misma sucesión de grados. Sin embargo, que dos grafos tengan la misma sucesión de grados no garantiza que sean isomorfos, como muestra el ejemplo 1.1.8.
- La sucesión de grados ha de conservarse y, como sabemos que en todo grafo la suma de los grados coincide con dos veces del número de arista, deducimos que dos grafos isomorfos han de tener el mismo número de aristas.

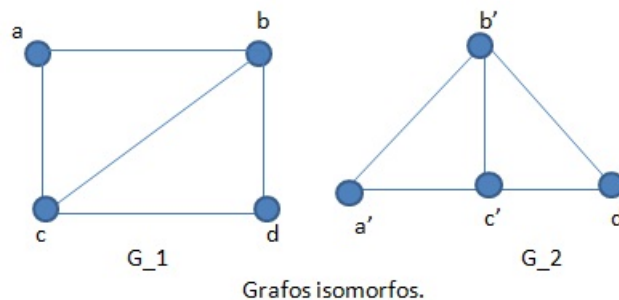
Ejemplo 1.1.8. Consideremos los dos grafos siguientes:



Ambos grafos tienen seis vértices, cinco aristas y su sucesión de grados es $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$. Sin embargo, no son isomorfos pues, por ejemplo, el vértice de grado 3 es, en un caso, vecino de dos de grado 1 y de uno de grado 2; y en el otro, de uno de grado 1 y de dos de grado 2.

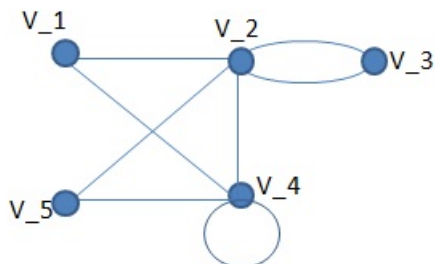
Hay otras propiedades que son conservadas bajo isomorfismos (todas las relacionadas con vecindades); por ejemplo, el llamado cuello de un grafo, del que hablaremos más adelante. Sin embargo, no existe una caracterización para la isomorfía de dos grafos (una serie de propiedades que determinen si dos grafos son o no isomorfos). Veamos un ejemplo de dos grafos isomorfos:

Ejemplo 1.1.9. Los dos grafos que siguen son isomorfos, ya que la función ϕ que lleva a en a' , b en b' , c en c' y d en d' es una biyección y preserva la adyacencia.



Definición 1.1.10. Un bucle es una arista cuyos extremos son iguales, es decir, una arista que une un vértice con él mismo. Decimos que el grafo tiene aristas múltiples si en el grafo dos o más aristas unen el mismo par de vértices.

En este ejemplo las dos aristas que unen v_2 y v_3 son aristas múltiples y $[v_4, v_4]$ es bucle.



Definición 1.1.11. *Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si existe en G un camino entre cualquier par de vértices; en otro caso es desconexo.*

Podemos considerar un grafo conexo como una red telefónica. Los vértices del grafo son “estaciones” y las aristas “conexiones”. Una o más conexiones pueden fallar o pueden fallar algunas estaciones dejando a la red desconexa. Este es un ejemplo práctico de grafo conexo.

En un grafo no conexo hay vértices que no pueden ser conectados por ningún camino. Como sugiere la intuición, el grafo estará formado por diversos “bloques” de vértices, cada uno de los cuales es un grafo conexo.

Definición 1.1.12. *Una componente conexa de un grafo $G = (V, E)$ es un subgrafo conexo no contenido en ningún otro subgrafo conexo de G , es decir, una componente de G es un subgrafo que es maximal respecto a la propiedad de estar conectado.*

Por tanto, un subgrafo conexo F de un grafo G es una componente de G si, para cada grafo conexo H , con $F \subseteq H \subseteq G$, $V(F) \subseteq V(H)$ y $E(F) \subseteq E(H)$, resulta que $F = H$.

Por definición, las componentes conexas de un grafo son grafos conexos y es fácil ver que todo grafo se puede representar como unión de grafos conexos (sus componentes conexas).

En un grafo conexo definimos la distancia $d(u, v)$ entre dos vértices u y v como la mínima de las longitudes de los caminos que unen u y v en G . Un camino que une u y v de longitud $d(u, v)$ se llama geodésico; si no existe tal camino, definimos $d(u, v) := \infty$. Bajo esta función de distancia el conjunto $V(G)$ es un espacio métrico con las propiedades que se detallan a continuación:

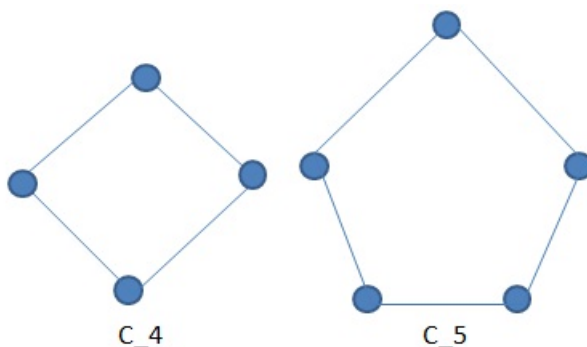
- $d(u, v) \geq 0$ para todo par u, v de vértices de G y $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
- Simetría: $d(u, v) = d(v, u)$ para todo $u, v \in V(G)$.
- Desigualdad triangular: $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ para cualesquiera $u, v, w \in V(G)$.

Nótese que, podemos tener las mismas propiedades si u, v y w no son vértices, es decir son puntos cualesquiera de G . Podemos concluir que G es un espacio métrico también.

El supremo de la distancia entre dos vértices de G es el diámetro en los vértices de G y se denota por $\text{diam } V(G)$; el supremo de la distancia entre dos puntos cualesquiera de G es el diámetro de G y lo denotamos por $\text{diam } G$; finalmente, el supremo de la distancia entre un vértice y un punto cualquiera de G es el diámetro prima de G y se denota por $\text{diam}' G$. Es evidente que

$$\text{diam } V(G) \leq \text{diam}' G \leq \text{diam } G.$$

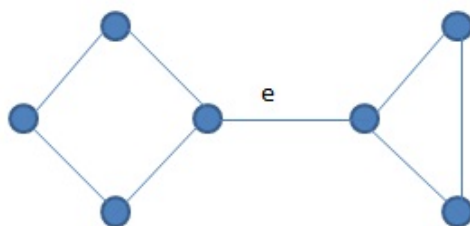
Veamos un ejemplo de estos diámetros:



En estos ejemplos, en los que todas las aristas tienen longitud 1, se verifica que $\text{diam } V(C_4) = \text{diam}' C_4 = \text{diam } C_4 = 2$, $\text{diam } V(C_5) = 2$ y $\text{diam } C_5 = \text{diam}' C_5 = 5/2$.

Definición 1.1.13. Diremos que una arista $e = [u, v]$ de un grafo $G = (V, E)$ es un puente o arista de corte si el grafo $G \setminus e$ que se obtiene de G al quitar la arista e (y dejar los mismos vértices) tiene más componentes conexas que G . De forma similar un vértice de corte de un grafo es aquel vértice cuya eliminación (quitando también todas las aristas incidentes en él) aumenta el número de componentes.

Por ejemplo, en el siguiente grafo conexo:



e es la única arista del grafo que es puente (y sus extremos son los únicos vértices de corte del grafo).

En particular, si el grafo G de partida es conexo, entonces se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.1.18. Si $G = (V, E)$ es no trivial entonces

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \rho(G).$$

Demostración. Consideremos un vértice de grado $\rho(G)$. Si suprimimos las aristas que inciden en él quedará aislado. Por lo tanto, $\lambda(G) \leq \rho(G)$. Supongamos que e_1, \dots, e_n desconectan a G donde $n = \lambda(G)$. Sean v_1, \dots, v_n extremos de las aristas mencionadas. Entonces suprimiendo dichos vértices se desconecta G . Por lo tanto $\kappa(G) \leq n$. \square

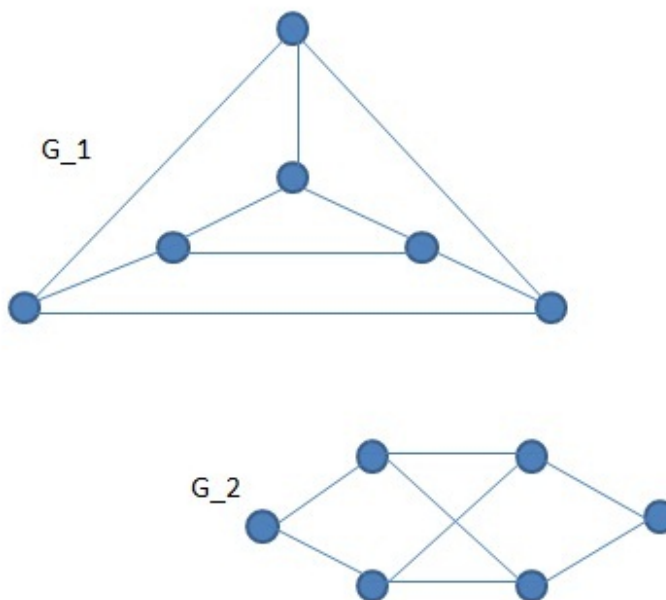
Definición 1.1.19. Un ciclo es una sucesión de aristas adyacentes, donde no se recorre dos veces la misma arista, y donde se regresa al punto inicial.

Definición 1.1.20. Si $G = (V, E)$ es un grafo, se llama cuello del grafo G al ínfimo de las longitudes de los ciclos del grafo G , y lo denotamos por $g(G)$. El supremo de las longitudes de los ciclos de un grafo G es su circunferencia y se denota por $c(G)$.

Veamos otra propiedad de los grafos conexos.

Proposición 1.1.21. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y e una arista perteneciente a un ciclo en G . Entonces $G \setminus e$ es conexo.

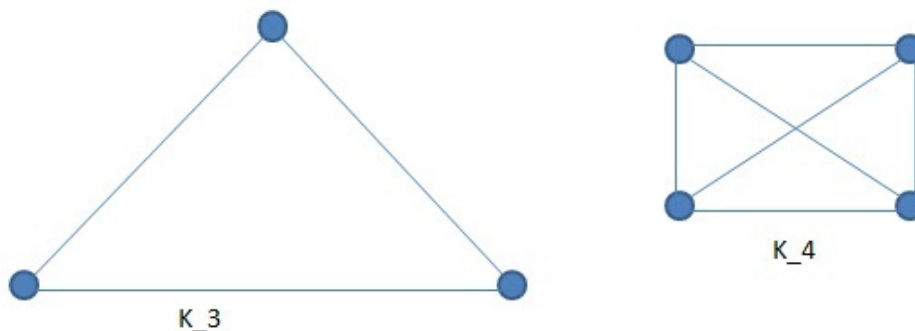
Tenemos, por tanto, otra forma de ver que dos grafos no son isomorfismos: si dos grafos G_1 y G_2 son ϕ -isomorfos, entonces $g(G_1) = g(G_2)$ y $c(G_1) = c(G_2)$. Por ejemplo, si consideramos los grafos:



Es fácil ver que tienen igual número de vértices y de aristas y todos los vértices son de grado 3; pero no son isomorfos, porque $g(G_1) = 3$ mientras que $g(G_2) = 4$. Pero recordemos una vez más que comprobar que todas estas propiedades son iguales en dos grafos no basta para concluir que dos grafos son isomorfos. Habrá que encontrar una biyección entre los respectivos conjuntos de vértices que respete las relaciones de vecindad.

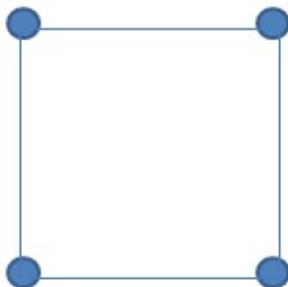
Algunos ejemplos de clases de grafos

Definición 1.1.22. *Un grafo completo es un grafo en el cual cada dos vértices distintos se unen exactamente por una arista; en otras palabras, si todos los pares de vértices de G son adyacentes, entonces G es completo. El grafo completo con n vértices se denota por K_n .*



Proposición 1.1.23. *Todo grafo completo es regular, pero el recíproco no es cierto.*

Veamos que el recíproco no es cierto.



En efecto, este grafo es regular de grado 2 y, sin embargo, los vértices en diagonal no son adyacentes; por tanto, no es completo.

La siguiente desigualdad relaciona la medida $|E|$ del grafo y su orden $|V|$.

Proposición 1.1.24. *En todo grafo $G = (V, E)$ se verifica:*

$$|E| \leq \frac{1}{2}|V|(|V| - 1)$$

y si se da la igualdad, entonces G es completo.

Por lo tanto tenemos la siguiente Proposición.

Proposición 1.1.25. *El grafo completo de n vértices K_n tiene $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ aristas.*

Esta Proposición da una relación entre el número de componentes conexas k de un grafo, su orden $|V|$ y su medida $|E|$.

Proposición 1.1.26. *Si un grafo $G = (V, E)$ posee k componentes conexas, entonces se verifica la siguiente desigualdad:*

$$|E| \leq \frac{1}{2}(|V| - k)(|V| - k + 1).$$

Definición 1.1.27. *Un camino es un grafo no vacío $P = (V, E)$ de la forma.*

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}, \quad E = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}]\},$$

donde las x_i son todos distintos. Los vértices x_0 y x_{n-1} están unidos por P y se dominan extremos; los vértices x_1, \dots, x_{n-2} son los vértices interiores de P .

El número de aristas de un camino es su longitud. El camino con n vértices se denota por P_n .

El número de aristas puede ser cero; por lo tanto, $P_1 = K_1$.

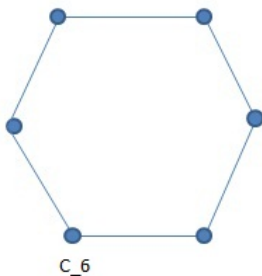
Obsérvese que el grafo camino P_n tiene $n - 1$ aristas.

Veamos un ejemplo del grafo camino para $n = 4$:

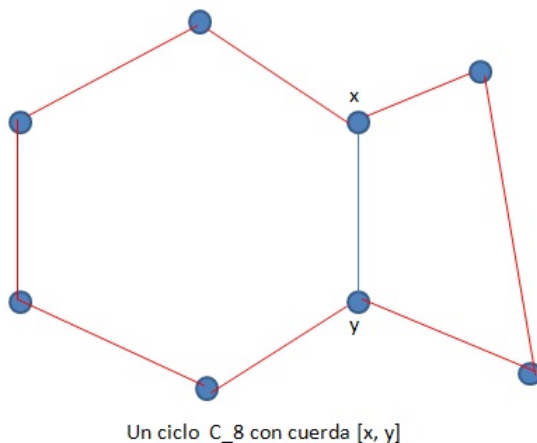


Definición 1.1.28. *Si $P = x_0 \dots x_{n-1}$ es un camino y $n \geq 3$, entonces el grafo C con $V(C) = V(P)$ y $E(C) = E(P) \cup [x_{n-1}, x_0]$ se llama un ciclo. Como con los caminos, denotamos a menudo un ciclo por su sucesión de vértices (cíclica); el ciclo anterior puede ser escrito como $x_0 \dots x_{n-1}x_0$. La longitud de un ciclo es su número de aristas (o vértices); el ciclo de orden n se denota por C_n .*

El número de vértices en un grafo C_n es igual al número de aristas, y cada vértice tiene grado dos, por lo que cada vértice tiene dos aristas incidentes.



Una arista que une dos vértices de un ciclo pero no es en sí una arista del ciclo es una cuerda de tal ciclo. El siguiente es un ejemplo de ciclo con cuerda.



Diámetro y cuello están, por supuesto, relacionados:

Proposición 1.1.29. Cada grafo $G = (V, E)$ que contiene un ciclo satisface $g(G) \leq 2 \text{diam } V(G) + 1$.

Definición 1.1.30. La excentricidad de un vértice v en un grafo $G = (V, E)$, denotado por $\text{ecc}(v)$, es la distancia de v a uno de los vértices más lejanos de v , es decir,

$$\text{ecc}(v) := \max_{x \in V(G)} d(v, x).$$

El radio de un grafo G , denotado $\text{rad}(G)$, es la excentricidad más pequeña de cualquiera de sus vértices, es decir,

$$\text{rad}(G) := \min_{x \in V(G)} \text{ecc}(x).$$

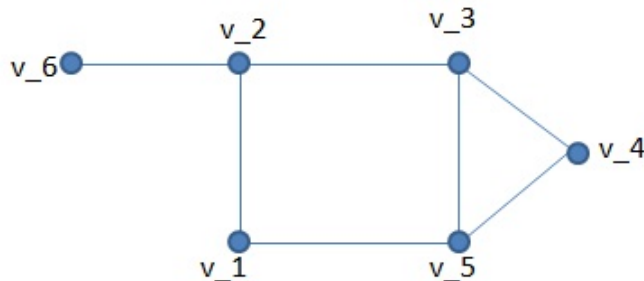
Un vértice central v de un grafo G es un vértice con mínima excentricidad.

Se tiene la siguiente relación entre el diámetro y el radio de un grafo.

Proposición 1.1.31. Si $G = (V, E)$ es grafo conexo, entonces

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam } V(G) \leq 2\text{rad}(G).$$

Veamos un ejemplo de grafo para estudiar la excentricidad y el radio.



La excentricidad de cada vértice en el grafo anterior es:

$$\text{ecc}(v_1) = 2, \text{ecc}(v_2) = 2, \text{ecc}(v_3) = 2, \text{ecc}(v_4) = 3, \text{ecc}(v_5) = 3, \text{ecc}(v_6) = 3.$$

Por tanto, el radio de este grafo es 2.

La siguiente Proposición da una cota por arriba del orden de un grafo sabiendo su radio y su grado máximo.

Proposición 1.1.32. Un grafo $G = (V, E)$ de radio a lo más k y grado máximo a lo sumo $d \geq 3$ tiene menos de $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$ vértices.

Del mismo modo, podemos acotar el orden de G por debajo, suponiendo que tanto su grado mínimo y su cuello son grandes. Para $d \in \mathbb{R}$ y $g \in \mathbb{N}$ definimos:

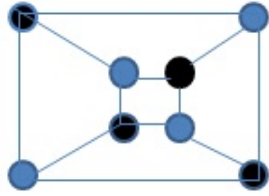
$$n_0(d, g) := \begin{cases} 1 + d \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i, & \text{si } g := 2r + 1 \text{ es impar,} \\ 2 \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i, & \text{si } g := 2r \text{ es par.} \end{cases}$$

Proposición 1.1.33 ([AHL]). Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si $\text{gr}(G) \geq d \geq 2$ y $g(G) \geq g \in \mathbb{N}$ entonces $|G| \geq n_0(d, g)$.

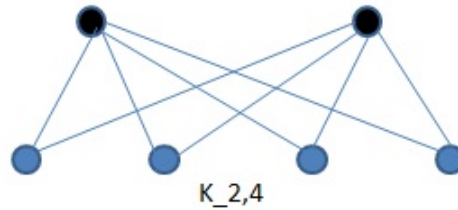
Corolario 1.1.34. Si $\rho(G) \geq 3$ entonces $g(G) < 2 \log |G|$.

Definición 1.1.35. Un grafo bipartito es un grafo $G = (V, E)$ cuyo conjunto de vértices V es unión de dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2 de forma que $[u, v] \in E$ implica que, o bien $u \in V_1$ y $v \in V_2$, o bien $u \in V_2$ y $v \in V_1$. Es decir, todas las aristas tienen un extremo en cada uno de los conjuntos V_1 y V_2 .

Recordemos que V_1 y V_2 forman una partición de V si son disjuntos y su unión es V .



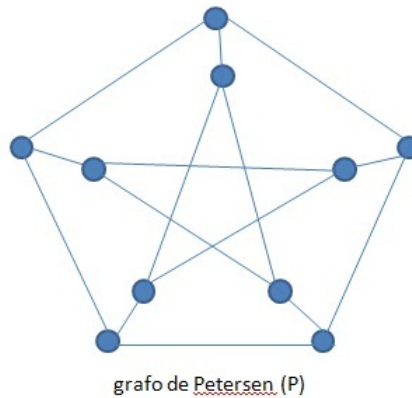
Definición 1.1.36. Un grafo bipartito completo es un grafo bipartito en lo cual cada vértice en el primer conjunto se une a cada vértice en el segundo conjunto por exactamente una arista, y se denota por K_{mn} .



Obsérvese K_{mn} tiene $m + n$ vértices, y mn aristas, y que K_{mn} y K_{nm} son isomorfos.

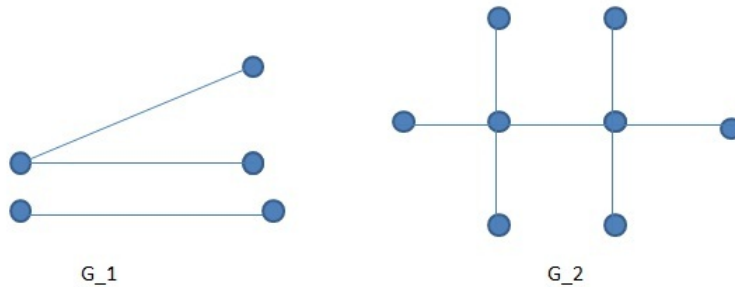
Proposición 1.1.37. Un grafo es bipartito si y solamente si no contiene ciclos de longitud impares.

Definición 1.1.38. El grafo de Petersen es un grafo con 10 vértices y 15 aristas que a menudo sirve como un ejemplo y contraejemplo de diversas propiedades en la teoría de grafos. Este grafo es nombrado así por Julius Peter Christian Petersen, quien lo publicó en 1898.



Definición 1.1.39. Un bosque es un grafo sin ciclos. Un árbol es un bosque conexo.

El grafo G_1 es un bosque y el grafo G_2 es un árbol.



Proposición 1.1.40. Si $G = (V, E)$ es un grafo conexo, entonces

$$|E| \geq |V| - 1.$$

Proposición 1.1.41. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si G es acíclico (no tiene ciclos), entonces $|E| \leq |V| - 1$.

Existen numerosas formulaciones equivalentes de la definición de árbol; la siguiente Proposición resume las fundamentales.

Proposición 1.1.42. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

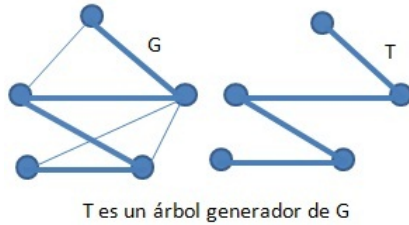
1. G es un árbol.
2. Dos vértices cualesquiera de G están conectados por un único camino simple.
3. G es conexo, pero si se le suprime una arista cualquiera, deja de serlo.
4. G es conexo y $|E| = |V| - 1$.
5. G es acíclico y $|E| = |V| - 1$.
6. G es acíclico, pero si se le añade una arista, deja de serlo.

Proposición 1.1.43. Si un bosque tiene n vértices y k componentes conexas, entonces tiene $n - k$ aristas.

Definición 1.1.44. Un árbol generador de un grafo $G = (V, E)$ es un subgrafo generador de G que es un árbol.

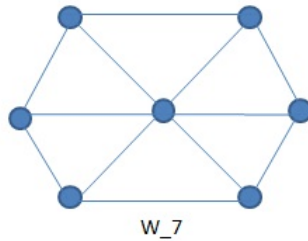
Notemos que, si T es un árbol generador de G , entonces T es un árbol maximal contenido en T en el sentido siguiente: si $e \in E(G)$ es una arista que no pertenece a $E(T)$, $T + e$ es un subgrafo de G que contiene un ciclo.

La siguiente figura muestra un grafo G y uno de sus árboles generadores.



Proposición 1.1.45. *Todo grafo conexo tiene un árbol generador.*

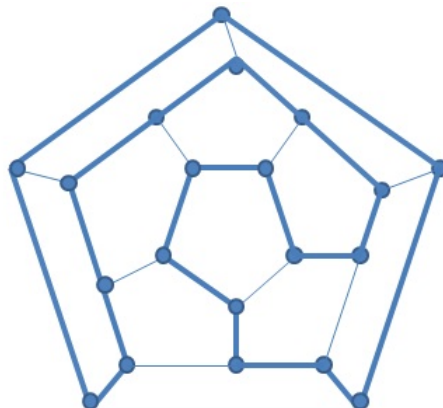
Definición 1.1.46. *El grafo rueda W_n de orden n es un grafo que contiene un ciclo de orden $n - 1$ y un vértice adicional que se conecta con todos los vértices del ciclo.*



Definición 1.1.47. *Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que una familia de subgrafos $\{G_n\}_n$ de G es una descomposición de árbol de G si $\cup_n G_n = G$, $G_n \cap G_m$ es un vértice o el conjunto vacío para cada $n \neq m$, y el grafo R es un árbol, donde $V(R) = \{v_n\}_n$ y $[v_n, v_m] \in E(R)$ si y sólo si $G_n \cap G_m \neq \emptyset$.*

Observación 1.1.48. *Cada v_n es un punto abstracto que se asocia a G_n (por tanto, v_n no es un vértice de G_n).*

Definición 1.1.49. *Un camino C en $G = (V, E)$ se dice que es hamiltoniano si C pasa por cada vértices del grafo exactamente una vez. Un ciclo que pasa exactamente una vez por cada vértice (excepto el vértice inicial, que aparece también como final) se denomina ciclo hamiltoniano.*



Es claro que el grafo completo K_n es hamiltoniano, ya que podemos empezar en cualquier vértice e ir sucesivamente a cualquier otro vértice todavía no visitado; por tanto, tenemos la siguiente Proposición:

Proposición 1.1.50. *Todo grafo completo es hamiltoniano.*

Veamos una condición necesaria para que un grafo sea hamiltoniano, pero el problema general de determinar cuando un grafo es de este tipo, es muy difícil.

Proposición 1.1.51. *Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que $|E| \geq 3$, sea S un subconjunto no vacío de V y sea $c(G \setminus S)$ el número de componentes conexas del subgrafo $G \setminus S$. Entonces, una condición necesaria para que G sea hamiltoniano es que $c(G \setminus S) \leq |S|$.*

($|E|$ y $|S|$ son, respectivamente, el número de aristas de G y de vértices de S .)

Proposición 1.1.52. *Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo de n vértices y u, v dos vértices no adyacentes (independientes) tales que $gr(u) + gr(v) \geq n$. Entonces, G es hamiltoniano si y sólo si $G + [u, v]$ es hamiltoniano.*

Proposición 1.1.53 (Ore, 1960). *Si un grafo $G = (V, E)$ tiene $n \geq 3$ vértices y la suma de los grados de cualquier par de vértices no adyacentes es mayor o igual que n , entonces el grafo es hamiltoniano.*

Corolario 1.1.54 (Dirac, 1952). *Si $G = (V, E)$ es un grafo de orden $n \geq 3$ y grado mínimo $\rho(G) \geq n/2$, entonces es hamiltoniano.*

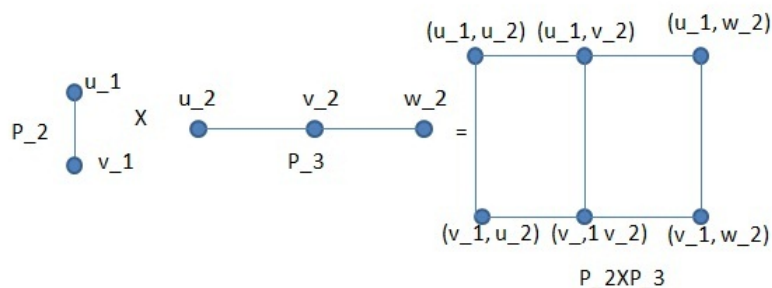
Demostración. Si u y v son vértices no adyacentes de G entonces $gr(u) + gr(v) \geq \rho(G) + \rho(G) \geq n/2 + n/2$, y por la Proposición anterior G es hamiltoniano. \square

1.2 Producto cartesiano de grafos

El producto cartesiano es un método importante para construir un grafo más grande, y juega un papel importante en el diseño y análisis de redes.

Definición 1.2.1. *Sean $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos conexos localmente finitos (posiblemente infinitos) con aristas de longitud 1 sin bucles ni aristas múltiples. Definimos $G_1 \times G_2$ como el grafo con vértices $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ y $[(u_1, u_2), (v_1, v_2)] \in E(G_1 \times G_2)$ si y sólo si tenemos $u_1 = v_1 \in V(G_1)$ y $[u_2, v_2] \in E(G_2)$ o bien $u_2 = v_2 \in V(G_2)$ y $[u_1, v_1] \in E(G_1)$. Consideramos que cada arista de $G_1 \times G_2$ tiene longitud 1.*

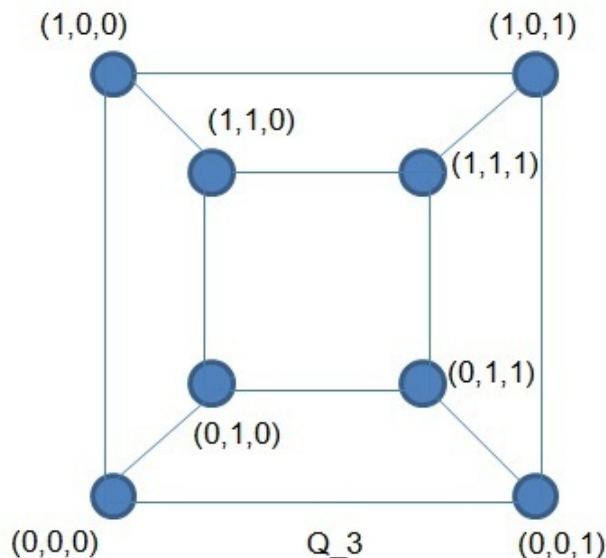
Una manera conveniente de dibujar este producto es poner, en primer lugar, una copia de G_2 en cada vértice de G_1 y luego unir los correspondientes vértices de G_2 con sus copias. También puede hacerse al revés, es decir, dibujar una copia de G_1 en cada vértice de G_2 y realizar la misma operación; el producto es “conmutativo” y ambos productos son isomorfos. El método de construcción se detalla en la siguiente figura:



Hay una clase importante de grafos definida en términos de producto cartesiano; el n -cubo o hipercubo, denotado por Q_n , es el grafo P_2 si $n = 1$, mientras que, si n es mayor o igual que 2, Q_n se define recursivamente como $Q_{n-1} \times P_2$.

El n -cubo o hipercubo puede ser considerado también como el grafo cuyos vértices están etiquetados por n -vectores binarios (u_1, u_2, \dots, u_n) , es decir, u_i es 0 ó 1 para $1 \leq i \leq n$. Sus aristas son adyacentes dos a dos si y sólo si sus correspondientes n -vectores difieren tan sólo en una coordenada.

El grafo Q_n es un grafo n -regular cuyo orden es 2^n . En la figura siguiente se muestra, un ejemplo de este grafo.



Obsérvese $Q_1 \cong P_2$, y $Q_2 \cong C_4$. Los grafos Q_n , pese a que los dibujos esbozados no hagan sospecharlo, son bipartitos: observemos que la mitad de los vértices están etiquetados con listas de n posiciones que contienen un número par de ceros, y la otra mitad, un número impar. Y dos listas que tienen un número par de ceros no pueden ser vecinas en este grafo (e igual para las impares).

Decimos que G_1 y G_2 son factores de $G_1 \times G_2$. Tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 1.2.2. $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$,

$$\rho(G_1 \times G_2) = \rho(G_1) + \rho(G_2)$$

y

$$\Delta(G_1 \times G_2) = \Delta(G_1) + \Delta(G_2).$$

Proposición 1.2.3. Para todo par de grafos G_1, G_2 tenemos

$$(i) \ d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2), \text{ para todo } (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V(G_1 \times G_2).$$

$$(ii) \ \text{diam}_{G_1 \times G_2} V(G_1 \times G_2) = \text{diam}_{G_1} V(G_1) + \text{diam}_{G_2} V(G_2).$$

Las siguientes observaciones y anotaciones son muy útiles para trabajar con el producto cartesiano de grafos.

Observación 1.2.4. Si H_1 es un subgrafo de $G_1 = (V_1, E_1)$ y H_2 es un subgrafo de $G_2 = (V_2, E_2)$, entonces para cualquier $u \in V_1$ y $v \in V_2$, $H_1 \times \{v\}$ y $\{u\} \times H_2$ son subgrafos del producto $G_1 \times G_2$, denotados por H_1v y uH_2 , respectivamente. En particular, si $P = \{x_1, v_1, v_2, \dots, v_m, y_1\}$ es un camino de x_1 a y_1 en G_1 , entonces para cualquier $v \in V_2$, $Pv = \{(x_1, v), (v_1, v), (v_2, v), \dots, (v_m, v), (y_1, v)\}$ es un camino desde el vértice (x_1, v) al vértice (y_1, v) en $G_1 \times G_2$.

Similarmente, si $W = \{x_2, u_1, u_2, \dots, u_l, y_2\}$ es un camino de x_2 a y_2 en G_2 , entonces para cualquier $u \in V_1$, $uW = \{(u, x_2), (u, u_1), (u, u_2), \dots, (u, u_l), (u, y_2)\}$ es un camino desde el vértice (u, x_2) al vértice (u, y_2) en $G_1 \times G_2$. Si $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ son dos vértices $G_1 \times G_2$, entonces $Q = Px_2 \cup y_1W$ es un camino de x a y en $G_1 \times G_2$. Un tal camino se puede expresar como:

$$Q : x = (x_1, x_2) \xrightarrow{Px_2} (y_1, x_2) \xrightarrow{y_1W} (y_1, y_2) = y.$$

Algunas definiciones y propiedades

Cuando G es 1-conexo, existe un camino entre cada par de vértice del grafo. La extensión de este resultado a grafos n -conexos, $n \geq 1$, constituye el Teorema de Whitney. Consideremos antes, sin embargo, el resultado clásico sobre la conectividad: el Teorema de Menger.

Sean u, v vértices no adyacentes de un grafo G . Se dice que $S \subseteq V(G)$ es un conjunto $u - v$ separador si $G \setminus S$ es no conexo y u, v pertenecen a componentes distintas de $G \setminus S$. Es decir, S es un conjunto $u - v$ separador, con $u, v \in V(G) \setminus S$, si y sólo si cada camino entre u y v contiene algún elemento de S .

Análogamente, dados dos vértices cualesquiera de G , $F \subseteq E(G)$ es un conjunto $u - v$ arista-separador si $G \setminus F$ es no conexo y u, v pertenecen a componentes distintas de $G \setminus F$.

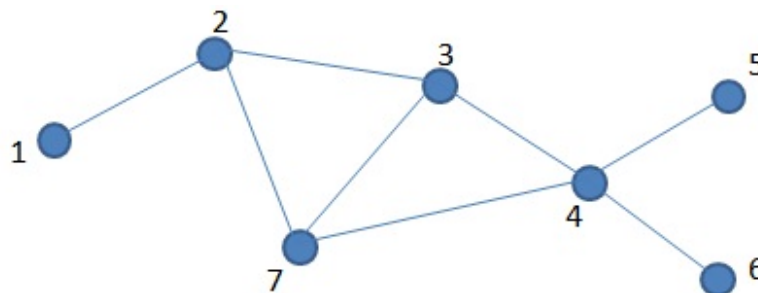
Dados dos caminos entre u y v , diremos que son internamente disjuntos si los únicos vértices que tienen en común son precisamente los vértices terminales u y v . De forma similar, dos caminos entre u y v son aristas disjuntos si no tienen aristas en común.

El Teorema de Menger relaciona el número mínimo de elementos que tiene que tener un conjunto que separe dos vértices dados con el número máximo de caminos disjuntos entre estos vértices.

Sean u y v dos vértices distintos de un grafo $G = (V, E)$. Los símbolos $\xi(G; u, v)$ y $\eta(G; u, v)$ denotan, respectivamente, la cantidad máxima de caminos internamente disjuntos entre u y v , y la cantidad máxima de caminos arista-disjuntos entre u y v ; los símbolos $\kappa(G; u, v)$ y $\lambda(G; u, v)$ denotan, respectivamente, la cantidad mínima de vértices de un conjunto $u - v$ separador, y el número mínimo de aristas de un conjunto $u - v$ arista-separador.

Veamos el ejemplo siguiente para entender mejor estos conceptos:

Ejemplo 1.2.5. *En el grafo*



el conjunto $S = \{7, 3\}$ separa 1 de 6. Observemos que este no es el conjunto de menor cardinal que separa 1 de 6. En efecto, $S = \{4\}$ también separa 1 de 6. Luego, el número mínimo de vértices que hay que eliminar para desconectar 1 de 6 es uno. Notemos además que dos caminos de 1 a 6 nunca son disjuntos, es decir, la máxima cantidad de caminos disjuntos de 1 a 6 es también uno.

Veamos ahora que pasa cuando $u = 2$ y $v = 4$. En este caso $S = \{3, 7\}$ separa 2 de 4 y no hay ningún conjunto de menor cardinal que separa 2 de 4. Es decir, el mínimo número de vértices que hay que eliminar para desconectar 2 de 4 es dos. Por otra parte, el máximo número de caminos disjuntos que unen 2 y 4 también es dos.

En general, si hay k -caminos disjuntos de u y v , cualquier conjunto que separa u de v debe contener al menos k vértices.

Tenemos la siguiente Proposición.

Proposición 1.2.6 (Teorema de Menger). Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces para todo $u, v \in V(G)$,

(i) $\kappa(G; u, v) = \xi(G; u, v)$ si $(u, v) \notin E(G)$;

(ii) $\lambda(G; u, v) = \eta(G; u, v)$.

Proposición 1.2.7 (Teorema de Menger–Whitney). Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Entonces

(i) $\kappa(G) \geq k$ si y sólo si $\xi(G; u, v) \geq k$ para cada $u, v \in V(G)$;

(ii) $\lambda(G) \geq k$ si y sólo si $\eta(G; u, v) \geq k$ para cada $u, v \in V(G)$, en otras palabras un grafo G es k -arista conexo si y sólo entre cada par de vértice de G , existen al menos k -caminos arista-disjuntos.

Donde, $\kappa(G)$ y $\lambda(G)$ son, respectivamente, el mínimo número de elementos de un conjunto $S \subset V(G)$ tal que el grafo $G \setminus S$, es no conexo y es el mínimo número de elementos de un conjunto $F \subset E(G)$ tal que el grafo $G \setminus F$, es no conexo, (ver la definición [1.1.17](#)).

Conectividad del producto cartesiano de grafos

La conectividad no sólo es un concepto básico en la teoría de grafos, sino también una medida importante para la fiabilidad y tolerancia a fallos en una red.

Ahora, vamos a ver algunos resultados sobre el producto cartesiano de grafos, referentes a la conectividad, la arista-conectividad.

Para la conectividad y la arista-conectividad del producto cartesiano de grafos, hasta ahora, los mejores resultados son:

$$\kappa(G_1 \times G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_2)$$

y

$$\lambda(G_1 \times G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_2).$$

También existen cotas para las conectividades (para la conectividad y la arista-conectividad) del producto, involucrando la conectividad y los grados mínimos de cada factor. Estos resultados se generalizan a los productos cartesianos de $n \geq 3$ grafos conexos.

Proposición 1.2.8. *Sea $G_i = (V_i, E_i)$ un grafo conexo para cada $i = 1, 2$. Entonces $\kappa(G_1 \times G_2) \geq w$ si y sólo si*

$$(i) \ \xi(G_1 \times G_2; (x, u), (x, v)) \geq w \text{ para cada } x \in V_1, u, v \in V_2$$

$$(ii) \ \xi(G_1 \times G_2; (x, u), (y, u)) \geq w \text{ para cada } x, y \in V_1, u \in V_2.$$

Proposición 1.2.9. *Sea $G_i = (V_i, E_i)$ un grafo conexo para cada $i = 1, 2$. Entonces*

$$\kappa(G_1 \times G_2) \geq \min \{ \kappa(G_1) + \rho(G_2), \kappa(G_2) + \rho(G_1) \}.$$

Proposición 1.2.10. *Sea $G_i = (V_i, E_i)$ un grafo conexo para cada $i = 1, 2$. Entonces $\lambda(G_1 \times G_2) \geq w$ si y sólo si*

$$(i) \ \eta(G_1 \times G_2; (x, u), (x, v)) \geq w \text{ para cada } x \in V_1, u, v \in V_2$$

$$(ii) \ \eta(G_1 \times G_2; (x, u), (y, u)) \geq w \text{ para cada } x, y \in V_1, u \in V_2.$$

Proposición 1.2.11. *Sea $G_i = (V_i, E_i) \neq K_1$ un grafo conexo, para cada $i = 1, 2$. Entonces,*

$$\lambda(G_1 \times G_2) = \min \{ \rho(G_1) + \rho(G_2), \lambda(G_1)|V(G_2)|, \lambda(G_2)|V(G_1)| \}.$$

Capítulo 2

Conceptos y propiedades fundamentales de los espacios hiperbólicos

2.1 Espacios de Gromov

Como ya vimos en la introducción, la teoría de espacios hiperbólicos de Gromov nació motivada inicialmente por el estudio de grupos finitamente generados, y ha demostrado ser de enorme importancia práctica. En sus comienzos fue aplicada principalmente al estudio de grupos automáticos, que juegan un importante papel en ciencias de la computación (de hecho, los grupos que son espacios de Gromov, son a su vez grupos automáticos fuertemente geodésicos).

Sin embargo, en los últimos años se ha producido un importante cambio en la forma de trabajar en espacios de Gromov. Dicho cambio consiste en enfocar el tema desde un punto de vista más analítico y geométrico, en lugar del tradicional punto de vista algebraico. Esto ha permitido obtener uno de los resultados más importantes de la teoría: el Teorema de Mario Bonk que caracteriza los espacios de Gromov como aquellos espacios métricos geodésicos que satisfacen la propiedad de “estabilidad geodésica” (ver Teorema 2.1.15).

Para el estudio de los espacios hiperbólicos de Gromov usaremos la notación de [GH]. Veamos algunos resultados básicos sobre estos espacios. Puede consultarse [GH] para ampliar las definiciones y los teoremas de esta sección.

Existen varias definiciones posibles para el concepto de hiperbolicidad. Nosotros mostraremos tres que, a

priori, puede parecer que no guardan ninguna relación; sin embargo, como veremos más adelante, en realidad son equivalentes (ver Teorema 2.1.7).

Aunque la hiperbolicidad de Gromov puede definirse sobre espacios métricos arbitrarios, las dos primeras definiciones que veremos a continuación (triángulos thin y fine) necesitan la hipótesis adicional de que el espacio sea geodésico.

Definición 2.1.1. Si $g : [a, b] \rightarrow X$ es una curva continua en un espacio métrico (X, d) , la longitud de g se define como

$$L(g) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^n d(g(t_{j-1}), g(t_j)) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

Una geodésica γ en un espacio métrico X es una isometría de un intervalo de la recta real $I \subset \mathbb{R}$ en el espacio X , es decir, una aplicación que verifica $L(\gamma|_{[s,t]}) = d_X(\gamma(t), \gamma(s)) = t - s$ para todo $s, t \in I$ con $s < t$. Decimos que un espacio métrico X es un espacio métrico geodésico si para todo $x, y \in X$ existe una geodésica uniendo x con y , y que denotaremos por $[xy]$.

Observación 2.1.2. Podemos observar que las geodésicas no tienen por qué ser únicas; un ejemplo clásico es la esfera. Dos puntos antipodales pueden unirse por infinitas geodésicas: todos los semicírculos máximos que los unen. Por tanto, la notación $[xy]$ puede resultar ambigua en algunos casos. No obstante, usaremos dicha notación ya que es la notación habitual y, además, resulta muy útil.

Si D es un subconjunto cerrado de X , tal que D contiene un camino rectificable que une cada $z, w \in D$, consideramos siempre en D la métrica interna obtenida por la restricción de la métrica X , que es

$$d_D(z, w) := \inf \{ L_X(\gamma) : \gamma \subset D \text{ es una curva continua que une } z \text{ y } w \} \geq d_X(z, w).$$

Por consiguiente, $L_D(\gamma) = L_X(\gamma)$ para cada curva $\gamma \subset D$. Tenemos siempre $d_D(z, w) < \infty$ para cada $z, w \in D$.

Para considerar un grafo G como un espacio métrico geodésico, debemos identificar (por una isometría) cualquier arista $[u, v] \in E(G)$ con un intervalo real con longitud $l := L([u, v])$; por lo tanto, cualquier punto en el interior de la arista $[u, v]$ es un punto de G . Un grafo G está naturalmente equipado con una distancia o, más precisamente, una métrica definida en sus puntos, inducida al tomar los caminos más cortos en G . Entonces vemos G como un grafo métrico.

A lo largo de la tesis consideramos grafos (finitos o infinitos) conexos y localmente finitos (en cada bola hay un número finito de aristas). Estas condiciones garantizan que el grafo es un geodésico. En la sección 3.1 admitiremos grafos con aristas múltiples y bucles; además, las aristas pueden tener diferentes longitudes (como en Lema 3.1.13, en Teoremas 3.1.14, 3.1.15, 3.1.21, en Proposiciones 3.1.18, 3.1.19 y en los Lemas

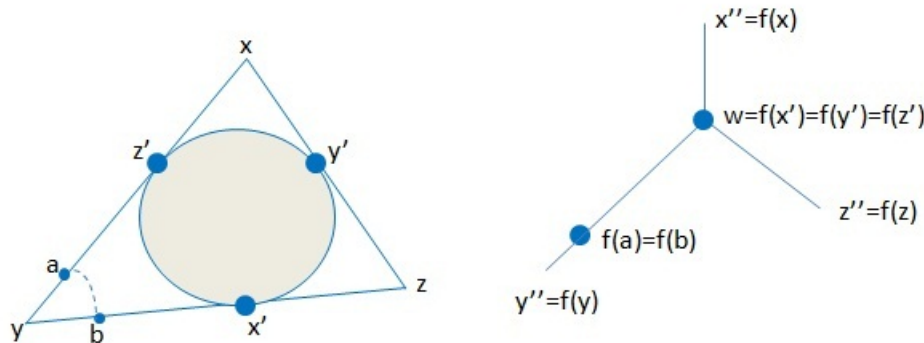
técnicos previos 3.1.4, 3.1.6, 3.1.16 y 3.1.17). Sin embargo, en la sección 3.2, al tratar grafos producto, todos los grafos serán simples (sin aristas múltiples ni bucles) y la longitud de todas las aristas será 1.

Definición 2.1.3. Si X es un espacio métrico geodésico y $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ es un polígono con lados $J_j \subseteq X$, decimos que J es δ -thin si para cada $x \in J_i$ tenemos que $d(x, \cup_{j \neq i} J_j) \leq \delta$. Denotamos por $\delta(J)$ la constante thin optimal de J , es decir $\delta(J) := \inf\{\delta \geq 0 : J \text{ es } \delta\text{-thin}\}$. Si $x_1, x_2, x_3 \in X$, un triángulo geodésico $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ es la unión de las tres geodésicas $[x_1x_2]$, $[x_2x_3]$ y $[x_3x_1]$. El espacio X es δ -hiperbólico (o satisface la condición de Rips con constante δ) si cada triángulo en X es δ -thin.

Observación 2.1.4. Todo cuadrilátero geodésico en un espacio δ -thin es 2δ -thin. Para ver esto, es suficiente dividir el cuadrilátero en dos triángulos y aplicar a éstos la definición 2.1.3. En general, todo polígono geodésico de n lados es $(n-2)\delta$ -thin. Un biángulo es un triángulo geodésico $\{x_1, x_2, x_3\}$ con $x_2 = x_3$. Por lo tanto, cada biángulo en un espacio métrico geodésico δ -hiperbólico es δ -thin.

Definición 2.1.5. Dado un triángulo geodésico $T = \{x, y, z\}$ en un espacio métrico geodésico X , construimos el triángulo T_E en el plano euclídeo cuyos lados tienen la misma longitud que los de T . Como no hay posible confusión, usaremos la misma notación para los puntos correspondientes a T y T_E . El círculo máximo inscrito en T_E interseca el lado $[xy]$ (respectivamente $[yz]$, $[zx]$) en un punto z' (respectivamente x' , y') de tal forma que $d(x, z') = d(x, y')$, $d(y, x') = d(y, z')$ y $d(z, x') = d(z, y')$. A los puntos x', y', z' , les llamaremos puntos internos de $\{x, y, z\}$ (ver el gráfico que sigue). Hay una única isometría f del triángulo $\{x, y, z\}$ sobre un trípode T_0 (un árbol con un vértice w de grado 3, y tres vértices x'', y'', z'' de grado uno, tal que $d(x'', w) = d(x, z') = d(x, y')$, $d(y'', w) = d(y, x') = d(y, z')$ y $d(z'', w) = d(z, x') = d(z, y')$).

El triángulo $\{x, y, z\}$ es δ -fine si $f(p) = f(q)$ implica que $d(p, q) \leq \delta$. El espacio X es δ -fine si todo triángulo geodésico en X es δ -fine.



Definición 2.1.6. Dado un espacio métrico (X, d) y un punto w , se define el producto de Gromov entre $x, y \in X$ respecto del punto base w como

$$(x|y)_w := \frac{1}{2} (d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)) \geq 0.$$

Diremos que el espacio métrico (X, d) es δ -hiperbólico de Gromov ($\delta \geq 0$), si

$$(x|z)_w \geq \min \{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta,$$

para todo $x, y, z, w \in X$. Diremos que X es hiperbólico de Gromov si es δ -hiperbólico de Gromov para algún δ .

Puede probarse que para todo $x, y, w, w' \in X$ se tiene

$$|(x|y)_w - (x|y)_{w'}| \leq d(w, w'). \quad (2.1.1)$$

El siguiente resultado establece la equivalencia entre la condición de Rips (Definición 2.1.3), la propiedad fine (Definición 2.1.5) y la hiperbolicidad de Gromov (Definición 2.1.6):

Teorema 2.1.7 ([GH] y [ABCD]). *Sea X un espacio métrico geodésico:*

1. *Si X es δ -hiperbólico de Gromov, entonces es 3δ -hiperbólico y 4δ -fine.*
2. *Si X es δ -hiperbólico, entonces es 4δ -hiperbólico de Gromov y 4δ -fine.*
3. *Si X es δ -fine, entonces es 2δ -hiperbólico de Gromov y δ -hiperbólico.*

Una interpretación geométrica interesante del producto de Gromov en espacios hiperbólicos es la siguiente.

Proposición 2.1.8 (Lemma 1.7, p. 38 [GH]). *Sea X un espacio métrico geodésico δ -fine. Para todo $x, y, w \in X$ se tiene que*

$$d(w, [xy]) - \delta \leq (x|y)_w \leq d(w, [xy]),$$

para toda geodésica $[xy]$ uniendo x con y en X .

La idea que subyace detrás de la *condición de Rips* es que los triángulos geodésicos en un espacio hiperbólico de Gromov son “uniformemente delgados”; por lo tanto, podemos interpretar la condición de Rips como una forma, más primitiva, de entender la curvatura negativa, que la tradicionalmente formulada como que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo geodésico es menor que π . Además, esta definición tiene la gran ventaja de no necesitar una métrica riemanniana, ya que se aplica a espacios métricos geodésicos.

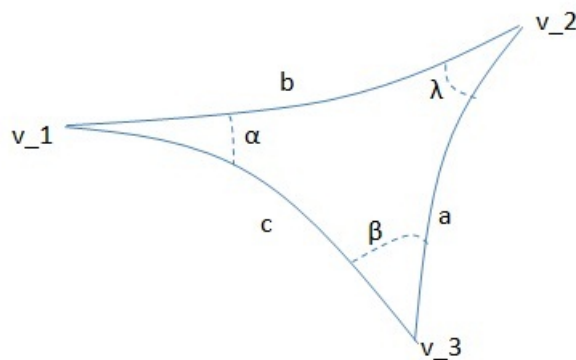
Antes de continuar, veamos de forma heurística la importancia del producto de Gromov. En esta teoría es habitual escribir $d(x, y) = |x - y|$, aunque recordemos que no hay estructura de espacio vectorial; si además

consideramos que el punto base w es un punto fijado, denotaremos $d(x, w) = |x - w| = |x|$. Reescribiendo con esta nueva notación la definición del producto de Gromov, tenemos: $|x - y| = |x| + |y| - 2(x|y)_w$, que recuerda al producto escalar. Esto sugiere que, en algún sentido, en espacios métricos hiperbólicos se pueden medir algo parecido a ángulos.

Es bien conocido que el producto escalar entre dos vectores x, y de un espacio euclídeo es cero si y sólo si x, y forman un ángulo de $\pi/2$. No obstante, el producto de Gromov de x, y , respecto de un punto base w , es cero si y sólo si w pertenece a una geodésica que une x e y ; por tanto, para que $(x|y)_w$ se haga pequeño necesitamos que los tres puntos estén alineados. Consecuentemente, el ángulo que juega el papel predominante en esta teoría es π en lugar de $\pi/2$.

Profundicemos un poco más en la relación entre ángulos y producto de Gromov. Igual que ocurre para los triángulos euclídeos, existen fórmulas que relacionan los ángulos interiores de un triángulo contenido en el plano hiperbólico, con las longitudes de los lados del mismo. De esta forma, dado un triángulo en el plano hiperbólico con vértices v_1, v_2, v_3 , lados de longitudes a, b, c y ángulos opuestos α, β, λ (con α el ángulo en v_1 , ver el gráfico siguiente), se tiene la ley de los cosenos hiperbólica

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh c \sinh b \cos \alpha .$$



En el caso particular de tener un triángulo rectángulo hiperbólico, es decir, con $\alpha = \pi/2$, entonces obtenemos la versión hiperbólica del Teorema de Pitágoras: $\cosh a = \cosh b \cosh c$. Para un α cualquiera (no necesariamente $\pi/2$), si las longitudes hiperbólicas a, b y c son muy grandes, podemos reemplazar la igualdad por la relación aproximada $\frac{1}{2}e^a \approx \frac{1}{4}e^{b+c}(1 - \cos \alpha)$, de donde se deduce que $e^a \approx e^{b+c} \sin^2(\alpha/2)$; tomando logaritmos obtenemos $\frac{1}{2}(b + c - a) \approx \log \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$, donde $b + c - a = d(v_1, v_3) + d(v_1, v_2) - d(v_2, v_3) = 2(v_2|v_3)_{v_1}$, y por lo tanto $(v_2|v_3)_{v_1} \approx \log \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$.

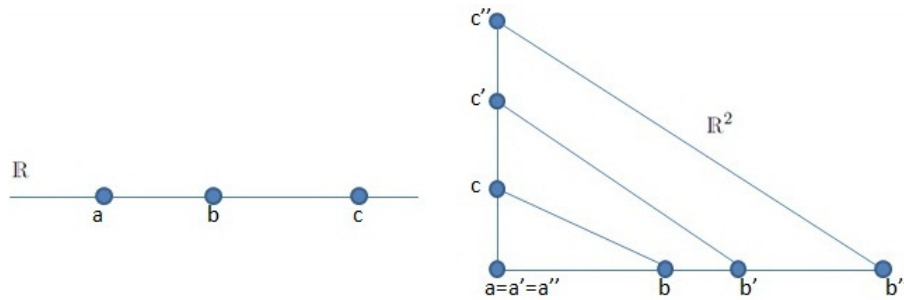
De esta forma queda patente la estrecha relación que existe entre el producto de Gromov de dos puntos y el ángulo que forman las geodésicas que los unen con el punto base. Es decir, simplemente manejando distancias (recordemos que la definición del producto de Gromov no involucra ningún otro concepto), somos

capaces de medir ángulos en el plano hiperbólico. La teoría de espacios hiperbólicos pone de manifiesto que este razonamiento válido para el plano hiperbólico, puede extenderse, en cierto sentido, a espacios métricos hiperbólicos generales.

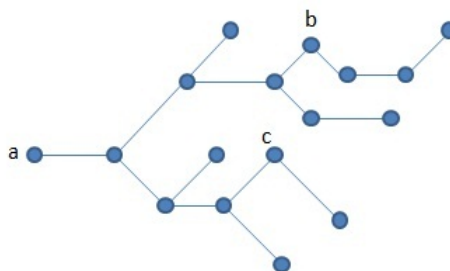
Existen ejemplos interesantes de espacios hiperbólicos, como son los siguientes:

Ejemplo 2.1.9.

- (1) *Toda variedad riemanniana completa simplemente conexa con curvatura seccional acotada superiormente por una constante $-k$, con $k > 0$ es hiperbólica (ver [GH, p. 52]).*
- (2) *Todo espacio métrico acotado es (diam X)-hiperbólico (ver [GH, p. 29]).*
- (3) *\mathbb{R}^n con la métrica euclídea es hiperbólico si y sólo si $n = 1$. Es evidente que todo punto de un triángulo contenido en la recta real pertenece simultáneamente a dos lados, y, por tanto, podemos concluir que todo triángulo es 0-thin. También es obvio que en el plano se pueden trazar triángulos de diámetro arbitrariamente grande, por lo que con su métrica euclídea \mathbb{R}^2 no es hiperbólico (ver el gráfico abajo). De forma similar puede razonarse para dimensiones superiores.*



- (4) *Todo árbol con aristas de longitud arbitraria es 0-hiperbólico (ver, por ejemplo, [GH, p. 29]). La afirmación es evidente porque se trata de una generalización de lo que ocurre en la recta real: todo punto de un triángulo contenido en un árbol pertenece simultáneamente a dos lados (ver el gráfico que sigue).*



(5) El plano hiperbólico \mathbb{H}^2 es $\log(\sqrt{2} + 1)$ -hiperbólico.

(6) Otros ejemplos básicos de espacios hiperbólicos son los llamados espacios de

Cartan-Alexandrov-Topogonov o $CAT(\kappa)$, donde $\kappa < 0$. Recordamos sus definiciones ([GH, p. 29]):

Definición 2.1.10. Sea (X, d) un espacio métrico geodésico y sea $\kappa \leq 0$. Decimos que (X, d) es un espacio de $CAT(\kappa)$ si cumple lo siguiente. Supongamos que $x, y, z \in X$, $p \in [xy]$ y $q \in [xz]$. Sea M_κ^2 el espacio modelo de curvatura constante κ , es decir, M_κ^2 es la variedad riemanniana homeomorfa a \mathbb{R}^2 y con curvatura constante κ . Sean $x', y', z' \in M_\kappa^2$ tales que $d(x, y) = d(x', y')$, $d(x, z) = d(x', z')$ y $d(y, z) = d(y', z')$. Sean $p' \in [x'y']$ y $q' \in [x'z']$ tales que $d(x, p) = d(x', p')$ y $d(x, q) = d(x', q')$. Entonces

$$d(p, q) \leq d(p', q').$$

Presentamos a continuación un tipo de aplicaciones que juegan un papel muy importante en esta teoría: las quasi-isometrías.

Definición 2.1.11. Una función entre dos espacios métricos $f : X \rightarrow Y$ es una quasi-isometría si existen constantes $a \geq 1$, $b \geq 0$ tales que para todo $x_1, x_2 \in X$ se tiene

$$\frac{1}{a} d_X(x_1, x_2) - b \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq a d_X(x_1, x_2) + b, \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Una función de este tipo se llama (a, b) -quasi-isometría. Decimos que f es ε -full (para algún $\varepsilon \geq 0$) si, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ con $d_Y(y, f(x)) \leq \varepsilon$. Una (a, b) -quasigeodésica en X es una (a, b) -quasi-isometría entre un intervalo de \mathbb{R} y X .

Cabe destacar que las quasi-isometrías son una clase muy flexible de aplicaciones, ya que pueden ser, incluso, discontinuas.

Ejemplo 2.1.12. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ con $f(x) = [x]$ es una $(1, 1)$ -quasi-isometría.

En nuestro contexto las quasi-isometrías son especialmente importantes puesto que se trata de una clase de aplicaciones que preserva la hiperbolicidad, como muestra el siguiente Teorema:

Teorema 2.1.13 (p. 88, [GH]). Consideremos una (a, b) -quasi-isometría entre espacios métricos geodésicos $f : X \rightarrow Y$. Si Y es δ -hiperbólico, entonces X es δ' -hiperbólico, donde δ' es una constante que sólo depende de δ , a y b . Además, si f es ε -full, entonces X es hiperbólico si y sólo si Y es hiperbólico.

Definición 2.1.14. Consideremos una constante $H > 0$, un espacio métrico X , y dos conjuntos $Y, Z \subseteq X$. El conjunto $V_H(Y) := \{x \in X : d(x, Y) \leq H\}$ se denomina H -entorno de Y en X . La distancia de Hausdorff de Y a Z se define como

$$d_H(Y, Z) := \inf\{H > 0 : Y \subseteq V_H(Z), Z \subseteq V_H(Y)\}.$$

Teorema 2.1.15 (Teorema de estabilidad geodésica). *Todo espacio métrico geodésico δ -hiperbólico X es geodésicamente estable, en el sentido de que si h es una (a,b) -quasigeodésica uniendo dos puntos x, y , y g es una geodésica en X uniendo dichos puntos, entonces existe una constante $H = H(\delta, a, b)$ tal que $d_H(h, g) \leq H$, donde d_H es la distancia de Hausdorff.*

Recíprocamente, la estabilidad geodésica implica que el espacio es hiperbólico.

La primera parte del resultado puede encontrarse en [GH], mientras que el recíproco fue probado por Mario Bonk en [Bo]. Dicha propiedad puede expresarse de forma intuitiva de la siguiente manera: cerca de una quasigeodésica hay siempre una geodésica con los mismos extremos, donde la palabra “cerca” involucra constantes uniformes.

Esta importante propiedad de los espacios de Gromov es la clave de su más moderna e importante aplicación: ayudar a garantizar la seguridad de la transmisión de información por internet (ver [J, p. 47] y [JL1]). El Departamento de Defensa de Estados Unidos está interesado en prevenir lo que podría ser un ataque informático a cierta escala (lo que denominan con el exótico nombre de *Electronic Pearl Harbor*). De hecho, ha subvencionado la investigación en espacios hiperbólicos de Gromov de Edmond Jonckheere (doctor en Ingeniería Eléctrica y Full Professor of Electrical Engineering and Mathematics, University of Southern California, Los Angeles), debido a las aplicaciones de la hiperbolicidad relacionadas con la seguridad informática.

Una estrategia clásica para preservar la seguridad en el envío de información por internet es dividir el mensaje en una gran cantidad de partes, y enviar cada parte por un “camino” diferente; la reconstrucción del mensaje resulta mucho más sencilla si las diferentes partes del mensaje llegan prácticamente al mismo tiempo, es decir, si los diferentes caminos usados para el envío tienen aproximadamente la misma longitud. Y aquí es donde juega un papel importante la hiperbolicidad de Gromov, ya que puede probarse que el grafo que modeliza internet es hiperbólico en sentido de Gromov, y eso implica que próximas a cualquier geodésica γ (el camino más corto entre dos puntos) pueden encontrarse gran cantidad de quasigeodésicas (caminos uniendo los dos extremos de γ con longitud no mucho mayor que la de γ).

La hiperbolicidad también juega un importante papel en la propagación de virus por la red (ver [J]).

Otro campo de aplicación de la hiperbolicidad es el análisis filogenético, área con un gran desarrollo en la actualidad, que trata de construir árboles o grafos que representen los datos sobre el ADN (ver [BKM])

Una forma alternativa de entender la importancia de los espacios hiperbólicos es verlos como espacios que se parecen mucho a los árboles: de hecho, los árboles son precisamente los únicos espacios 0-hiperbólicos (ver, por ejemplo, [GH, p. 30]). Esta similitud hace que los espacios de Gromov disfruten de interesantes propiedades en común con los árboles (ver, por ejemplo, [GH, p. 33]).

2.2 Demostraciones de algunos de los resultados básicos

Si X es un espacio hiperbólico, denotaremos por $\delta^*(X)$ la mejor constante de hiperbolicidad de Gromov de X , es decir,

$$\delta^*(X) := \inf \{ \delta : X \text{ es } \delta\text{-hiperbólico de Gromov} \},$$

por $\delta(X)$ la mejor constante de hiperbolicidad de X , es decir,

$$\delta(X) := \inf \{ \delta : X \text{ es } \delta\text{-hiperbólico} \},$$

y por $\delta_f(X)$ la mejor constante para la condición fine de X , es decir,

$$\delta_f(X) := \inf \{ \delta : X \text{ es } \delta\text{-fine} \}.$$

Teorema 2.2.1. *Sean X, Y espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una $(1, b)$ -quasi-isometría. Entonces,*

$$\delta^*(X) \leq \delta^*(Y) + 3b.$$

Si además f es ε -full, entonces

$$\delta^*(Y) \leq \delta^*(X) + 3b + 6\varepsilon.$$

Demostración. Observemos primeramente que

$$\begin{aligned} (f(x)|f(y))_{f(w)} &= \frac{1}{2} (d_Y(f(x), f(w)) + d_Y(f(y), f(w)) - d_Y(f(x), f(y))) \\ &\leq \frac{1}{2} (d_X(x, w) + b + d_X(y, w) + b - d_X(x, y) + b) \\ &= (x|y)_w + \frac{3b}{2}, \\ (f(x)|f(y))_{f(w)} &= \frac{1}{2} (d_Y(f(x), f(w)) + d_Y(f(y), f(w)) - d_Y(f(x), f(y))) \\ &\geq \frac{1}{2} (d_X(x, w) - b + d_X(y, w) - b - d_X(x, y) - b) \\ &= (x|y)_w - \frac{3b}{2}, \end{aligned}$$

para todo $x, y, w \in X$. Por tanto,

$$(x|y)_w - \frac{3b}{2} \leq (f(x)|f(y))_{f(w)} \leq (x|y)_w + \frac{3b}{2},$$

para todo $x, y, w \in X$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} (x|z)_w &\geq (f(x)|f(z))_{f(w)} - \frac{3b}{2} \\ &\geq \min \{ (f(x)|f(y))_{f(w)}, (f(y)|f(z))_{f(w)} \} - \delta^*(Y) - \frac{3b}{2} \\ &\geq \min \{ (x|y)_w, (y|z)_w \} - \delta^*(Y) - 3b, \end{aligned}$$

para todo $x, y, z, w \in X$. Entonces $\delta^*(X) \leq \delta^*(Y) + 3b$.

Si además f es ε -full, entonces dados $x', y', w' \in Y$ existen $x, y, w \in X$ con $d_Y(x', f(x)) \leq \varepsilon$, $d_Y(y', f(y)) \leq \varepsilon$ y $d_Y(w', f(w)) \leq \varepsilon$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(x'|y')_{w'} &= \frac{1}{2} (d_Y(x', w') + d_Y(y', w') - d_Y(x', y')) \\
&\leq \frac{1}{2} (d_Y(f(x), f(w)) + 2\varepsilon + d_Y(f(y), f(w)) + 2\varepsilon - d_Y(f(x), f(y)) + 2\varepsilon) \\
&= (f(x)|f(y))_{f(w)} + 3\varepsilon \leq (x|y)_w + \frac{3b}{2} + 3\varepsilon, \\
(x'|y')_{w'} &= \frac{1}{2} (d_Y(x', w') + d_Y(y', w') - d_Y(x', y')) \\
&\geq \frac{1}{2} (d_Y(f(x), f(w)) - 2\varepsilon + d_Y(f(y), f(w)) - 2\varepsilon - d_Y(f(x), f(y)) - 2\varepsilon) \\
&= (f(x)|f(y))_{f(w)} - 3\varepsilon \geq (x|y)_w - \frac{3b}{2} - 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $x', y', w' \in Y$. Consecuentemente,

$$(x|y)_w - \frac{3b}{2} - 3\varepsilon \leq (x'|y')_{w'} \leq (x|y)_w + \frac{3b}{2} + 3\varepsilon,$$

para todo $x', y', w' \in Y$. Entonces

$$\begin{aligned}
(x'|z')_{w'} &\geq (x|z)_w - \frac{3b}{2} - 3\varepsilon \geq \min \{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta^*(X) - \frac{3b}{2} - 3\varepsilon \\
&\geq \min \{(x'|y')_{w'}, (y'|z')_{w'}\} - \delta^*(X) - 3b - 6\varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $x', y', z', w' \in Y$. Por tanto, $\delta^*(Y) \leq \delta^*(X) + 3b + 6\varepsilon$. \square

El Teorema 2.2.1 tiene como consecuencia directa que la hiperbolicidad también se preserva entre espacios métricos (aunque no sean geodésicos) por $(1, b)$ -quasi-isometrías.

Teorema 2.2.2. *Consideremos una $(1, b)$ -quasi-isometría entre espacios métricos $f : X \rightarrow Y$. Si Y es δ -hiperbólico de Gromov, entonces X es δ' -hiperbólico de Gromov, donde $\delta' = \delta + 3b$. Además, si f es ε -full para algún $\varepsilon \geq 0$, entonces X es hiperbólico si y sólo si Y es hiperbólico.*

Existen ejemplos que muestran que la conclusión del Teorema 2.2.2 no se verifica si f es una (a, b) -quasi-isometría con $a > 1$ (ver [Ha]). No obstante, la conclusión con $a > 1$ es cierta si se impone la condición adicional de que X e Y sean espacios métricos geodésicos (ver Teorema 2.1.13)

Lema 2.2.3. *Sean X un espacio métrico geodésico δ -fine, g una geodésica en X , $z \in g$ y $z_0 \in X$. Denotemos por w uno de los puntos más cercanos a z_0 en g . Entonces $d(z_0, w) + d(w, z) - 2\delta \leq d(z_0, z) \leq d(z_0, w) + d(w, z)$.*

Demostración. La segunda desigualdad es una consecuencia de la desigualdad triangular.

Para probar la primera desigualdad consideremos $[wz] \subseteq g$. Por la Proposición 2.1.8 sabemos que $d(z_0, [wz]) \leq (w|z)_{z_0} + \delta$, y entonces

$$\begin{aligned} d(z_0, w) &= d(z_0, g) \leq d(z_0, [wz]) \leq (w|z)_{z_0} + \delta \\ &= \frac{1}{2} (d(z_0, w) + d(z_0, z) - d(w, z)) + \delta. \end{aligned}$$

Consecuentemente, deducimos que $d(z_0, w) + d(w, z) - 2\delta \leq d(z_0, z)$. \square

Es fácil probar que si h es una curva uniendo dos puntos x, y en un espacio métrico geodésico con $L(h) \leq d(x, y) + b$, entonces h es una $(1, b)$ -quasigeodésica (ver Ejercicio 4.2.1.1 en el libro [RST])

Teorema 2.2.4 (Versión “light” del Teorema de estabilidad geodésica). *Todo espacio métrico geodésico hiperbólico X verifica que si h es una curva uniendo dos puntos x, y , con $L(h) \leq d(x, y) + b$, y g es una geodésica en X uniendo dichos puntos, entonces $d_H(g, h) \leq 4\delta_f(X) + b$.*

Demostración. Fijemos $z_0 \in h$ y denotemos por w uno de los puntos más cercanos a z_0 en g . Por hipótesis, se verifica $L(h) \leq L(g) + b = d(x, y) + b$. Además, si h_1 es la parte de h que une x con z_0 y h_2 es la parte de h que une z_0 con y , se tiene que $L(h_1) \geq d(x, z_0)$ y $L(h_2) \geq d(z_0, y)$. Consecuentemente, $L(h) \geq d(x, z_0) + d(z_0, y)$.

El Lema 2.2.3 permite deducir

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq L(h) - b \geq d(x, z_0) + d(z_0, y) - b \\ &\geq d(x, w) + d(w, z_0) - 2\delta_f(X) + d(z_0, w) + d(w, y) - 2\delta_f(X) - b \\ &\geq d(x, y) + 2d(z_0, w) - 4\delta_f(X) - b. \end{aligned}$$

Por tanto, $d(z_0, g) \leq d(z_0, w) \leq 2\delta_f(X) + b/2$ para todo $z_0 \in h$ y deducimos que $h \subseteq V_{2\delta_f(X)+b/2}(g)$.

Fijemos ahora $\varepsilon > 0$ y elijamos puntos $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y$ en h con $d(x_j, x_{j+1}) \leq \varepsilon$ para $j = 0, 1, \dots, k-1$. Denotemos por w_j uno de los puntos más cercanos a x_j en g para cada $j = 0, 1, \dots, k$. El razonamiento anterior, con $z_0 = x_j$ nos da $d(x_j, w_j) \leq 2\delta_f(X) + b/2$ para $j = 0, 1, \dots, k$. Por la desigualdad triangular obtenemos que

$$\begin{aligned} d(w_j, w_{j+1}) &\leq d(w_j, x_j) + d(x_j, x_{j+1}) + d(x_{j+1}, w_{j+1}) \\ &\leq 2\delta_f(X) + b/2 + \varepsilon + 2\delta_f(X) + b/2 \\ &= 4\delta_f(X) + b + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ya que podemos elegir $w_0 = x_0 = x$ y $w_k = x_k = y$, para cada punto $z \in g$ existe un punto $w_j \in g$ con $d(z, w_j) \leq 2\delta_f(X) + b/2 + \varepsilon/2$. Entonces

$$\begin{aligned} d(z, h) &\leq d(z, x_j) \leq d(z, w_j) + d(w_j, x_j) \\ &\leq 2\delta_f(X) + b/2 + \varepsilon/2 + 2\delta_f(X) + b/2 = 4\delta_f(X) + b + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Entonces, $d(z, h) \leq 4\delta_f(X) + b$. Por tanto, $g \subseteq V_{4\delta_f(X)+b}(h)$ y $d_H(g, h) \leq 4\delta_f(X) + b$. \square

Teorema 2.2.5. *Para cada $\delta, b \geq 0$ y $a \geq 1$, existe una constante $K = K(\delta, a, b)$ con la siguiente propiedad:*

Si X es un espacio métrico geodésico δ -hiperbólico y $T \subseteq X$ es un triángulo de lados (a, b) -quasigeodésicos, entonces T es K -hiperbólico. Además, $K = \delta + 2H(\delta, a, b)$, donde H es la constante del Teorema 2.1.15.

Demostración. Sea T un triángulo de lados (a, b) -quasigeodésicos g_1, g_2 y g_3 , y sea γ_j una geodésica uniendo los extremos de g_j para cada $j = 1, 2, 3$. Denotemos por T' el triángulo geodésico de lados $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Sea $p \in T$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p \in g_1$. El Teorema 2.1.15 nos dice que existe un punto p' en γ_1 con $d(p, p') \leq H(\delta, a, b)$. Dado que T' es un triángulo δ -thin, existe $q' \in \gamma_2 \cup \gamma_3$ con $d(p', q') \leq \delta$. Usando de nuevo el Teorema 2.1.15, sabemos que existe un punto $q \in g_2 \cup g_3$ con $d(q, q') \leq H(\delta, a, b)$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} d(p, g_2 \cup g_3) &\leq d(p, q) \leq d(p, p') + d(p', q') + d(q', q) \\ &\leq H(\delta, a, b) + \delta + H(\delta, a, b), \end{aligned}$$

y T es $(\delta + 2H(\delta, a, b))$ -thin. \square

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 2.1.13 usando el Teorema 2.2.5.

Demostración del Teorema 2.1.13. Sean T un triángulo geodésico en X de lados g_1, g_2 y g_3 , y T_Y el triángulo de lados (a, b) -quasigeodésicos $f(g_1), f(g_2)$, y $f(g_3)$ en Y . Por el Teorema 2.2.5, T_Y es K -thin.

Sean $\varepsilon > 0$ y $p \in T$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p \in g_1$. Como T_Y es K -thin, entonces $d_Y(f(p), f(g_2) \cup f(g_3)) \leq K$ y existe un punto $q \in g_2 \cup g_3$ con $d_Y(f(p), f(q)) \leq K + \varepsilon$.

Por tanto,

$$d_X(p, g_2 \cup g_3) \leq d_X(p, q) \leq a d_Y(f(p), f(q)) + ab \leq aK + a\varepsilon + ab,$$

y $d_X(p, g_2 \cup g_3) \leq aK + ab$. Por tanto, T es $(aK + ab)$ -thin. Como T es un triángulo arbitrario, se tiene que X es $(aK + ab)$ -hiperbólico.

Supongamos además que f es ε -full. Es fácil comprobar que existe una (a', b') -quasi-isometría $g : Y \rightarrow X$, donde a', b' dependen sólo de a, b y ε . (A g se le denomina *quasi-inversa* de f .) Entonces basta con aplicar la primera parte del Teorema, ya probada. \square

Capítulo 3

Hiperbolicidad de Gromov en grafos

Los dos problemas más importantes en la teoría de grafos hiperbólicos son:

- Caracterizar los grafos hiperbólicos.
- Encontrar desigualdades que relacionen la constante de hiperbolicidad y otros parámetros del grafo.

Los resultados obtenidos en esta tesis contribuyen a la resolución de ambos problemas.

3.1 Hiperbolicidad y parámetros de grafos

En esta sección 3.1 consideraremos grafos (finitos o infinitos, posiblemente con aristas múltiples y/o bucles), y diferentes aristas pueden tener diferentes longitudes. Los resultados en esta sección 3.1 aparecen en el artículo [MRSV1] y están aceptados para su publicación en la revista *Ars Combinatoria*.

Nos gustaría señalar que decidir si un espacio es hiperbólico o no es una tarea extraordinariamente difícil: Nótese que, en primer lugar, tenemos que considerar un triángulo geodésico arbitrario T , y calcular la mínima distancia de un punto arbitrario P de T a la unión de los otros dos lados del triángulo a los que no pertenece P . Y entonces tenemos que tomar el supremo sobre todas las posibles elecciones de P y luego sobre todas las posibles elecciones de T . Además de la dificultad que entraña resolver este problema minimax, contamos con el obstáculo adicional de no conocer la localización exacta de las geodésicas en el espacio. Por lo tanto, es interesante obtener desigualdades que relacionen la constante de hiperbolicidad y otros parámetros del grafo.

Este es precisamente el objetivo de esta sección de la tesis. En particular, si g denota el cuello, probamos en la subsección 3.1.2 que $\delta(G) \geq g(G)/4$ para cada grafo (finito o infinito) (ver Teorema 3.1.15); en la subsección 3.1.3 probamos que si G es un grafo de orden n y aristas con longitud k (posiblemente con aristas

múltiples y/o bucles), entonces $\delta(G) \leq nk/4$ (ver Teorema 3.1.28). Encontramos una familia de grafos para la cual la primera desigualdad se alcanza (ver Teoremas 3.1.21, 3.1.22 y 3.1.23); también, caracterizamos el conjunto de grafos con $\delta(G) = nk/4$ (ver Teorema 3.1.28 y Proposición 3.1.27). Además, caracterizamos los grafos con aristas de longitud k con $\delta(G) < k$ en la subsección 3.1.1 (ver Teorema 3.1.9).

3.1.1 Relaciones entre la constante de hiperbolicidad y ciclos de grafos

Un subgrafo Γ de G se dice *isométrico* si $d_\Gamma(x, y) = d_G(x, y)$ para cada $x, y \in \Gamma$.

Los resultados siguientes aparecen en [RSVV, Lemma 5 y Theorem 11], respectivamente.

Lema 3.1.1. *Si Γ es un subgrafo isométrico de G , entonces $\delta(\Gamma) \leq \delta(G)$.*

Fijemos una constante positiva k . Denotamos por C_n el grafo ciclo con n vértices y n aristas con longitud k ; por tanto, C_n es un ciclo de longitud kn . Por K_n denotamos el grafo completo con n vértices y $n(n-1)/2$ aristas con longitud k . Denotamos por $K_{m,n}$ el grafo bipartito completo con $m+n$ vértices y mn aristas con longitud k , es decir, el grafo bipartito obtenido de un conjunto M de m vértices y un conjunto N de n vértices, relacionando con una arista cada vértice de M con cada vértice de N . Por W_n denotamos el grafo rueda con n vértices y $2n-2$ aristas con longitud k , obtenido añadiendo a C_{n-1} otro vértice v , y conectando con una arista cada vértice de C_{n-1} con v (ver el capítulo 1).

Teorema 3.1.2. *Los grafos siguientes con aristas de longitud k tienen estos valores precisos de δ :*

- *El grafo ciclo verifica $\delta(C_n) = nk/4$ para cada $n \geq 3$.*
- *El grafo completo verifica $\delta(K_1) = \delta(K_2) = 0$, $\delta(K_3) = 3k/4$, $\delta(K_n) = k$ para cada $n \geq 4$.*
- *El grafo bipartito completo verifica $\delta(K_{1,1}) = \delta(K_{1,2}) = \delta(K_{2,1}) = 0$, $\delta(K_{m,n}) = k$ para cada $m, n \geq 2$.*
- *El grafo rueda con n vértices W_n verifica $\delta(W_4) = \delta(W_5) = k$, $\delta(W_n) = 3k/2$ para cada $7 \leq n \leq 10$, y $\delta(W_n) = 5k/4$ para $n = 6$ y para cada $n \geq 11$.*
- *El grafo de Petersen P verifica $\delta(P) = 3k/2$.*

Es interesante observar el comportamiento inesperado de $\delta(W_n)$. Esto ilustra la dificultad del estudio de la constante hiperbolicidad.

Proposición 3.1.3. *Sea G un grafo con aristas de longitud k . Si existe un ciclo g en G con longitud $L(g) = 3k$, entonces*

$$\delta(G) \geq \frac{3k}{4}.$$

Demostración. Ya que cada arista tiene longitud k y $L(g) = 3k$, entonces g es un subgrafo isométrico de G . Por lo tanto, el Lema 3.1.1 da $\delta(G) \geq \delta(g)$ y el Teorema 3.1.2 implica $\delta(g) = \frac{3k}{4}$. \square

Dado un grafo G , definimos $A(G)$ como el grafo G sin sus bucles, y $B(G)$ como el grafo G sin sus aristas múltiples, obtenido sustituyendo cada arista múltiple por una arista simple con la longitud mínima de las aristas correspondientes a tal arista múltiple.

Necesitaremos el siguiente Lema (ver [RSVV, Theorem 8]):

Lema 3.1.4. *En cualquier grafo G se verifica la desigualdad $\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diam } G$.*

Teorema 3.1.5. *Sea G un grafo con aristas de longitud k . Si existe un ciclo g en G con longitud $L(g) \geq 4k$, entonces*

$$\delta(G) \geq \frac{1}{4} \min \{L(\sigma) : \sigma \text{ es un ciclo en } G \text{ con } L(\sigma) \geq 4k\}.$$

Nótese el Teorema 3.1.5 mejora la Proposición 3.1.3: por ejemplo, si existen ciclos de longitudes $3k$ y $7k$ en un grafo G y no existen ciclos de longitudes $4k$, $5k$ y $6k$, entonces la Proposición 3.1.3 da $\delta(G) \geq \frac{3k}{4}$ y el Teorema 3.1.5 da $\delta(G) \geq \frac{7k}{4}$.

Demostración. Consideremos un ciclo g_0 en G con longitud $L(g_0) \geq 4k$ y tal que

$$L(g_0) = \min \{L(\sigma) : \sigma \text{ es un ciclo en } G \text{ con } L(\sigma) \geq 4k\}.$$

Supongamos primero que $L(g_0) = 4k$. Consideremos el subgrafo (simple) Γ de G con los cuatro vértices de g_0 y cuyas aristas son las aristas en G que conectan estos cuatro vértices (si alguna de las aristas que une estos vértices es múltiple, en Γ consideramos sólo una arista; no se incluyen en Γ los bucles en G). Entonces Γ es un subgrafo isométrico de G . Además, Γ es isomorfo a alguno de estos grafos: al grafo ciclo C_4 , al grafo completo K_4 o al grafo H obtenido eliminando una arista a K_4 , ya que G no tiene ni bucles ni aristas múltiples. Por el Lema 3.1.1 tenemos que $\delta(G) \geq \delta(\Gamma)$, ya que Γ es un subgrafo isométrico de G .

Por el Teorema 3.1.2 sabemos que $\delta(C_4) = \delta(K_4) = k$. Consideremos los dos vértices x, y en H con grado 2 (sabemos que $d(x, y) = 2k$) y el biángulo B con vértices $\{x, y\}$ y lados γ_1, γ_2 tal que $\gamma_1 \cup \gamma_2 = g_0$. El punto medio p de γ_1 satisface $\delta(H) \geq \delta(B) \geq d(p, \gamma_2) = k$. Además, sabemos que $\delta(H) \leq \frac{1}{2} \text{diam } H = k$ por el Lema 3.1.4, y entonces $\delta(H) = k$. Por lo tanto, en cualquier caso $\delta(G) \geq \delta(\Gamma) = k$.

Supongamos ahora que $L(g_0) > 4k$. Fijemos un vértice v en g_0 , y consideremos el punto $u \in g_0$ tales que las dos subcurvas $g_1, g_2 \subset g_0$ con $g_1 \cup g_2 = g_0$ que unen u y v verifican $L(g_1) = L(g_2) = L(g_0)/2$. Vamos a demostrar que g_1 y g_2 son geodésicas. Buscando una contradicción, supongamos que existe una curva η que une u y v con $L(\eta) < L(g_0)/2$; entonces $g_1 \cup \eta$ es una curva cerrada en G con longitud $L(g_1 \cup \eta) < L(g_0)$; por lo tanto existe un ciclo $\sigma \subseteq g_1 \cup \eta$ con longitud $L(\sigma) = 3k$, ya que $L(g_0) > 4k$ es la longitud mínima de

los ciclos en G con longitud mayor o igual que $4k$. Entonces $L(g_1 \cap \sigma) = 2k$ y $L(\eta \cap \sigma) = k$; por lo tanto, si reemplazamos en $g_1 \cap \eta$ la subcurva $g_1 \cap \sigma$ por $\eta \cap \sigma$, entonces obtenemos un ciclo con longitud $L(g_0) - k$. Esto es la contradicción que estamos buscando, y concluimos que $d(u, v) = L(g_1) = L(g_2) = L(g_0)/2$.

Finalmente, consideramos el biángulo $B := \{\gamma_1, \gamma_2\}$ y el punto medio p de γ_1 (nótese que B es un biángulo ya que $d(u, v) = L(g_0)/2$). Tenemos $\delta(B) \geq d(p, \gamma_2) = L(g_0)/4$ (esto puede ser probado suponiendo que existe una curva más corta uniendo p y γ_2 y se encuentra una contradicción con un argumento similar al anterior). Por lo tanto, $\delta(G) \geq \delta(B) \geq L(g_0)/4$, y esto termina la prueba. \square

Una descomposición de árbol de G siempre existe, como mostraremos al introducir la descomposición de árbol canónica de G , antes del Teorema 3.1.21.

Necesitaremos el siguiente resultado (ver [BRSV1, Theorem 5]):

Lema 3.1.6. *Sean G un grafo y $\{G_n\}_n$ una descomposición de árbol de G (ver Definición 1.1.47). Entonces $\delta(G) = \sup_n \delta(G_n)$.*

Una pregunta interesante es cómo caracterizar los grafos G con aristas de longitud k y $\delta(G) = k$, pero parece muy difícil dar una descripción de tales grafos de manera simple. Los Teoremas 3.1.2 y 3.1.26 muestran una gran variedad de grafos con $\delta(G) = k$ (por ejemplo K_n para cada $n \geq 4$, $K_{m,n}$ para cada $m, n \geq 2$, y W_n para $n = 4, 5$).

Uno de los motivos por los que la hiperbolicidad está atrayendo tanta atención en teoría de grafos es que la constante de hiperbolicidad es una medida de cuánto se parece un grafo a un árbol (de hecho, los árboles son los únicos grafos que son 0-hiperbólicos). El siguiente resultado caracteriza precisamente los grafos más parecidos a los árboles en este sentido (con $\delta < k$).

Sin embargo, el siguiente Teorema permite caracterizar los grafos con $\delta(G) < k$.

Tenemos también algunos resultados que garantizan que una gran cantidad de grafos satisfacen $\delta(G) > k$ (ver Teorema 3.1.10).

Necesitaremos los siguientes Lemas (ver [BRSV1, Theorems 8 y 10], respectivamente):

Lema 3.1.7. *Si G es un grafo con algún bucle y cada arista tiene longitud k , entonces*

$$\delta(G) = \max \left\{ \delta(A(G)), \frac{k}{4} \right\}.$$

Lema 3.1.8. *Si G es un grafo con alguna arista múltiple y cada arista tiene longitud k , entonces*

$$\delta(G) = \max \left\{ \delta(B(G)), \frac{k}{2} \right\} = \max \left\{ \delta(B(A(G))), \frac{k}{2} \right\}.$$

Teorema 3.1.9. *Sea G un grafo con aristas de longitud k .*

- $\delta(G) < k/4$ si y sólo si G es un árbol.
- $\delta(G) < k/2$ si y sólo si $A(G)$ es un árbol.
- $\delta(G) < 3k/4$ si y sólo si $B(A(G))$ es un árbol.
- $\delta(G) < k$ si y sólo si cada ciclo g en G tiene longitud $L(g) \leq 3k$.

Además, si $\delta(G) < k$, entonces $\delta(G) \in \{0, k/4, k/2, 3k/4\}$.

Demostración. Si G es un árbol, sabemos que $\delta(G) = 0 < k/4$.

Consideremos ahora un grafo G con $\delta(G) < k/4$. Buscando una contradicción, supongamos que existe un ciclo en G . Por el Teorema 3.1.15 tenemos $k \leq g(G) \leq 4\delta(G) < k$, que es la contradicción que buscamos; por lo tanto, G es un árbol.

Si $A(G)$ es un árbol, sabemos que $\delta(A(G)) = 0$. Si G no tiene bucles, entonces $A(G) = G$ y $\delta(A(G)) = 0 < k/2$. Si G tiene algún bucle, entonces por el Lema 3.1.7, tenemos que

$$\delta(G) = \max \left\{ \delta(A(G)), \frac{k}{4} \right\} = \max \left\{ 0, \frac{k}{4} \right\} = \frac{k}{4} < \frac{k}{2}.$$

Sea G un grafo con $\delta(G) < k/2$. Si G es un árbol, entonces $A(G) = G$ es un árbol. Supongamos que G tiene algún ciclo. Obsérvese que no existen aristas múltiples en G , ya que en otro caso el Lema 3.1.8 daría $\delta(G) \geq k/2$. No existen ciclos en G con longitud $3k$, ya que en otro caso $\delta(G) \geq 3k/4$, por la Proposición 3.1.3. No existen ciclos en G con longitud mayor que $3k$, ya que en otro caso el Teorema 3.1.5 daría $\delta(G) \geq k$. Por consiguiente, cada ciclo de G es un bucle, y $A(G)$ es un árbol.

Si $B(A(G))$ es un árbol, tenemos $\delta(B(A(G))) = 0$. Si G no tiene aristas múltiples, entonces $B(A(G)) = A(G)$ es un árbol y entonces $\delta(G) < k/2 < 3k/4$. Si G tiene alguna arista múltiple, entonces por el Lema 3.1.8, tenemos que

$$\delta(G) = \max \left\{ \delta(B(A(G))), \frac{k}{2} \right\} = \max \left\{ 0, \frac{k}{2} \right\} = \frac{k}{2} < \frac{3k}{4}.$$

Sea G un grafo con $\delta(G) < 3k/4$. Si G es un árbol, entonces $B(A(G)) = G$ es un árbol. Supongamos que G tiene algún ciclo. No existen ciclos en G con longitud $3k$, ya que en otro caso $\delta(G) \geq 3k/4$, por la Proposición 3.1.3. No existen ciclos en G con longitud mayor que $3k$, ya que en otro caso el Teorema 3.1.5 da $\delta(G) \geq k$. Por consiguiente, cada ciclo de G es un bucle o una arista doble, y $B(A(G))$ es un árbol.

Supongamos ahora que cada ciclo g en G tiene longitud $L(g) \leq 3k$. Entonces tenemos dos posibilidades: $B(A(G))$ es un árbol (y ya hemos visto que $\delta(G) < 3k/4$) o cada ciclo g en $B(A(G))$ tiene longitud $L(g) = 3k$. En este último caso, consideremos el conjunto de ciclos $\{g_n\}_n$ en $B(A(G))$ con longitud $3k$, y las clausuras

$\{H_m\}_m$ de las componentes conexas de $B(A(G)) \setminus \cup_n \{g_n\}$. Es claro que la unión de $\{g_n\}_n$ y $\{H_m\}_m$ es una descomposición de árbol de $B(A(G))$, y entonces el Lema 3.1.6 da que

$$\delta(B(A(G))) = \max \left\{ \sup_n \delta(g_n), \sup_m \delta(H_m) \right\}.$$

Como cada g_n es isométrico a C_3 , el Teorema 3.1.2 da que $\delta(g_n) = \delta(C_3) = 3k/4$. Como cada H_m es un árbol, tenemos $\delta(H_m) = 0$. Por lo tanto, $\delta(B(A(G))) = 3k/4$. Por el Lema 3.1.8, tenemos que

$$\delta(G) = \max \left\{ \delta(B(A(G))), \frac{k}{2} \right\} = \max \left\{ \frac{3k}{4}, \frac{k}{2} \right\} = \frac{3k}{4} < k.$$

Sea G un grafo con $\delta(G) < k$. Entonces el Teorema 3.1.5 da que cada ciclo g en G tiene longitud $L(g) \leq 3k$.

Hemos visto en la prueba que si $\delta(G) < k$, entonces $\delta(G) \in \{0, k/4, k/2, 3k/4\}$. \square

Damos ahora algunos resultados que garantizan que muchos grafos satisfacen $\delta(G) > k$.

Teorema 3.1.10. *Sea G un grafo con aristas de longitud k . Si existen un ciclo g en G con longitud $L(g) = 5k$ y un vértice $w \in g$ tales que $[w, w'] \in E(G)$ para exactamente dos vértices $w' \in g$, entonces $\delta(G) \geq 5k/4$.*

Observación 3.1.11. *Nótese que la hipótesis sobre el vértice w es necesaria en el Teorema 3.1.10, como muestra la Proposición 3.1.25 más abajo (con $n = 5$).*

Demostración. Consideremos el subgrafo Γ de G con los vértices de g y cuyas aristas son las de G que conectan estos vértices.

Vamos a demostrar que Γ es un subgrafo isométrico de G : consideramos dos vértices x, y en Γ ; si $d_G(x, y) = k$, entonces $[x, y] \in E(G)$, y por consiguiente, $[x, y] \in E(\Gamma)$ y $d_\Gamma(x, y) = k = d_G(x, y)$; si $d_G(x, y) > k$, entonces $d_\Gamma(x, y) > k$ y por lo tanto $d_\Gamma(x, y) = 2k$ (ya que Γ tiene cinco vértices y contiene el subgrafo g isomorfo a C_5), y por lo tanto, $d_G(x, y) = 2k = d_\Gamma(x, y)$. Por consiguiente, Γ es un subgrafo isométrico de G y $\delta(G) \geq \delta(\Gamma)$, por el Lema 3.1.1.

Por lo tanto, basta probar que $\delta(\Gamma) \geq 5k/4$. Como $[w, w'] \in E(G)$ para exactamente dos vértices $w' \in g$, existe un punto $z \in g$ con $d(w, z) = 5k/2$. Consideramos el biángulo $\{w, z\}$ con lados γ_1, γ_2 cuya unión es g . El punto medio p de γ_1 satisface $d(p, \gamma_2) = 5k/4$, y entonces $\delta(G) \geq \delta(\Gamma) \geq 5k/4$. \square

Como una consecuencia del Teorema 3.1.10 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1.12. *Sea G un grafo con aristas de longitud k . Si existe un ciclo g en G con longitud $L(g) = 5k$ y un vértice $w \in g$ con grado dos, entonces $\delta(G) \geq 5k/4$.*

Ahora, como una consecuencia de la Proposición 3.1.3 y los Teoremas 3.1.5, 3.1.9 y 3.1.10, tenemos para cada grafo G con aristas de longitud k :

Si G tiene algún bucle, entonces $\delta(G) \geq k/4$.

Si G tiene alguna arista múltiple, entonces $\delta(G) \geq k/2$.

Si G tiene algún ciclo con tres aristas, entonces $\delta(G) \geq 3k/4$.

Si G tiene algún ciclo con cuatro aristas, entonces $\delta(G) \geq k$.

Si G tiene algún ciclo g con cinco aristas y un vértice $w \in g$ tales que $[w, w'] \in E(G)$ para exactamente dos vértices $w' \in g$, entonces $\delta(G) \geq 5k/4$.

3.1.2 Constante de hiperbolicidad y cuello de un grafo

El Teorema 3.1.15 relaciona la constante de hiperbolicidad con un parámetro interesante de un grafo G , como es su cuello $g(G)$. Necesitamos dos resultados previos.

Lema 3.1.13. *Para cada grafo C que sea un ciclo tenemos*

$$\delta(C) = \frac{L(C)}{4}.$$

Demostración. Como $\text{diam } C = L(C)/2$, el Lema 3.1.4 da que $\delta(C) \leq L(C)/4$. Consideramos un biángulo B en C con vértices $\{x, y\}$ a distancia $L(C)/2$, y con lados γ_1, γ_2 tales que $\gamma_1 \cup \gamma_2 = C$. El punto medio p de γ_1 satisface $\delta(C) \geq \delta(B) \geq d(p, \gamma_2) = d(p, \{x, y\}) = L(C)/4$. Por consiguiente, $\delta(C) = L(C)/4$. \square

El resultado siguiente es la principal herramienta en la prueba del Teorema 3.1.15. Además, es interesante por sí sólo. Nótese que se cumple trivialmente para grafos finitos.

Teorema 3.1.14. *Sea C cualquier ciclo en cualquier grafo G . Existe un ciclo isométrico en G que contiene por lo menos una arista de C .*

Demostración. Si no existe una curva simple γ no contenida en C uniendo dos vértices $x_0, y_0 \in V(C)$, entonces γ es un ciclo isométrico en G , y la afirmación cumple.

En otro caso, existe una curva simple γ no contenida en C uniendo dos vértices $x_0, y_0 \in V(C)$. Definamos

$$C^* := \{(u, v) \in V(C) \times V(C) : \text{existe una curva simple } \eta \text{ que une } u, v \\ \text{con } \eta \text{ no contenida en } C\}.$$

Sea $(x, y) \in C^*$ con $d_C(x, y) \leq d_C(u, v)$ para cada $(u, v) \in C^*$.

Definamos

$$C' := \{\eta : \eta \text{ es una curva simple que une } x, y \text{ con } \eta \text{ no contenida en } C\}.$$

Consideremos $\sigma \in C'$ con $L(\sigma) \leq L(\eta)$ para cada $\eta \in C'$.

Podemos escribir $C = C^1 \cup C^2$, donde C^1, C^2 son curvas en C que unen x e y . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $L(C^1) \leq L(C^2)$, y definimos un nuevo ciclo $C_0 := C^1 \cup \sigma$.

Ahora probaremos que C_0 es un ciclo isométrico en G . Buscaremos una contradicción suponiendo que existen $x_1, y_1 \in V(C_0)$ con $d(x_1, y_1) < d_{C_0}(x_1, y_1)$.

Primero, mostremos que no es posible tener $x_1, y_1 \in C^1$. Si $\{x_1, y_1\} \neq \{x, y\}$, entonces $d_C(x_1, y_1) < d_C(x, y)$, y $[x_1 y_1]$ no está contenida en C ; por lo tanto, $(x_1, y_1) \in C^*$ y este hecho contradice la definición de x e y . Si $\{x_1, y_1\} = \{x, y\}$, entonces $L([xy]) = d(x, y) < d_{C_0}(x, y) \leq L(\sigma)$ y $[xy]$ no está contenida en C ya que $L([xy]) = d(x, y) < d_{C_0}(x, y) \leq L(C^1)$; por lo tanto, $[xy] \in C'$ y este hecho contradice la definición de σ .

Comprobemos ahora que no es posible tener $x_1, y_1 \in \sigma$. Si $\{x_1, y_1\} = \{x, y\}$, hemos visto que este hecho contradice la definición de σ . Si $\{x_1, y_1\} \neq \{x, y\}$ y denotamos por σ_0 el subconjunto de σ que une x e y , entonces $\eta := [x_1, y_1] \cup (\sigma \setminus \sigma_0)$ no está contenida en C y $L(\eta) < L(\sigma)$; por lo tanto, $\eta \in C'$ y este hecho contradice la definición de σ .

Si $x_1 \in C^1 \setminus \{x, y\}, y_1 \in \sigma \setminus \{x, y\}$, entonces consideremos una geodésica γ que une x_1 e y_1 ; por lo tanto, la unión γ' de γ y una subcurva de σ es una curva simple que une x_1 e y_1 , y γ' no está contenida en C . Por lo tanto, $(x_1, y_1) \in C^*$ y $d_C(x_1, y_1) < d_C(x, y)$, y estos hechos contradicen la definición de x e y . Por simetría, no es posible tener $x_1 \in \sigma \setminus \{x, y\}, y_1 \in C^1 \setminus \{x, y\}$.

Estas son las contradicciones que buscábamos. Por lo tanto, C_0 es un ciclo isométrico en G . Es claro que C_0 contiene por lo menos una arista de C . □

Teorema 3.1.15. *Para cualquier grafo G tenemos*

$$\delta(G) \geq \frac{g(G)}{4},$$

y la desigualdad es optimal.

Demostración. La desigualdad en el enunciado de este Teorema es optimal ya que es, en realidad, una igualdad para cada grafo ciclo, por el Lema 3.1.13.

Si G no contiene ciclos, entonces G es un árbol y $g(G) = 0 = \delta(G)$.

Si existe un ciclo en G , entonces el Teorema 3.1.14 da que existe un ciclo isométrico C_0 en G . Entonces los Lemas 3.1.1 y 3.1.13 dan

$$\delta(G) \geq \delta(C_0) = \frac{L(C_0)}{4} \geq \frac{g(G)}{4}.$$

□

Nótese que no es posible obtener la desigualdad inversa $\delta(G) \leq c g(G)$ para ninguna constante positiva c : consideramos el grafo G_n obtenido uniendo un bucle en C_n (con aristas de longitud 1); es claro que

$g(G_n) = 1$ y $\delta(G_n) = n/4$.

En [BRSV1, Corollary 4] y [RSVV, Theorem 12] encontramos, respectivamente, los siguientes resultados.

Lema 3.1.16. *En cualquier grafo G ,*

$$\delta(G) = \sup \{ \delta(T) : T \text{ es un triángulo geodésico que es un ciclo} \}.$$

Lema 3.1.17. *Sea $C_{a,b,c}$ el grafo con dos vértices y tres aristas que los unen con longitudes $a \leq b \leq c$.*

Entonces

$$\delta(C_{a,b,c}) = \frac{c + \min\{b, 3a\}}{4}.$$

Proposición 3.1.18. *Denotemos por C_{a_1, a_2, \dots, a_k} el grafo con dos vértices y k aristas que los unen con longitudes $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$. Entonces*

$$(i) \quad \delta(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}) = \frac{a_k + \min\{a_{k-1}, 3a_1\}}{4}.$$

$$(ii) \quad \delta(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}) = \frac{1}{2} \text{ diam } C_{a_1, a_2, \dots, a_k} \text{ si y sólo si } a_{k-1} \leq 3a_1.$$

Demostración. Denotemos por x_1, x_2 los vértices de C_{a_1, a_2, \dots, a_k} , y por A_1, A_2, \dots, A_k las aristas con longitudes a_1, a_2, \dots, a_k , respectivamente.

Consideremos un triángulo geodésico T ; para calcular $\delta(C_{a_1, a_2, \dots, a_k})$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que T es un ciclo, por el Lema 3.1.16. Entonces la curva cerrada dada por T es $A_i \cup A_j$ con $1 \leq i < j \leq k$.

Si $i = 1$, entonces $A_1 \cup A_j$ es un subgrafo isométrico de C_{a_1, a_2, \dots, a_k} . Si $i > 1$, entonces $A_1 \cup A_i \cup A_j$ es un subgrafo isométrico de C_{a_1, a_2, \dots, a_k} . Por lo tanto, por los lemas 3.1.1 y 3.1.17 tenemos

$$\begin{aligned} \delta(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}) &= \max \left\{ \max_{1 < j \leq k} \delta(C_{a_1, a_j}), \max_{1 < i < j \leq k} \delta(C_{a_1, a_i, a_j}) \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{1 < j \leq k} \frac{a_j + a_1}{4}, \max_{1 < i < j \leq k} \frac{a_j + \min\{a_i, 3a_1\}}{4} \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{a_k + a_1}{4}, \frac{a_k + \min\{a_{k-1}, 3a_1\}}{4} \right\} = \frac{a_k + \min\{a_{k-1}, 3a_1\}}{4}. \end{aligned}$$

□

Tenemos la siguiente familia de grafos extremales para el Teorema 3.1.15.

Proposición 3.1.19. *El grafo C_{a_1, a_2, \dots, a_k} verifica $\delta(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}) = g(C_{a_1, a_2, \dots, a_k})/4$ si y sólo si $a_1 = a_2 = \dots = a_k$.*

Demostración. Nótese que $g(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}) = a_1 + a_2$.

Si $a_1 = a_2 = \dots = a_k$, entonces la Proposición 3.1.18 da que

$$4\delta(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}) = a_k + \min\{a_{k-1}, 3a_1\} = a_1 + a_2 = g(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}).$$

Supongamos ahora que $\delta(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}) = g(C_{a_1, a_2, \dots, a_k})/4$. La Proposición 3.1.18 da que

$$a_1 + a_2 = g(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}) = 4\delta(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}) = a_k + \min\{a_{k-1}, 3a_1\}.$$

Probemos primero que $a_{k-1} < 3a_1$. Busquemos una contradicción, suponiendo que $\min\{a_{k-1}, 3a_1\} = 3a_1$. Entonces $a_1 + a_2 = a_k + 3a_1$ y concluimos que $a_k \geq a_2 = a_k + 2a_1 > a_k$, lo cual es la contradicción que buscábamos. Por lo tanto, tenemos $a_{k-1} < 3a_1$, y deducimos $a_1 + a_2 = a_k + a_{k-1}$; esto implica $a_1 = a_2 = \dots = a_k$. \square

Recordemos que un vértice v de un grafo G es un vértice de corte si $G \setminus \{v\}$ no es conexo. Nótese que cualquier vértice con grado por lo menos dos en un árbol es un vértice de corte.

Denotemos por $\{G_n\}_n$ las clausuras en G de las componentes conexas del conjunto

$$G \setminus \{v \in V(G) : v \text{ es un vértice de corte de } G\}.$$

Es claro que $\{G_n\}_n$ es una descomposición de árbol de G ; la llamamos *descomposición de árbol canónica* de G . Dado cualquier número positivo N , decimos que G pertenece a \mathcal{E}_N si G no es un árbol y para cada n , el grafo G_n es o bien una arista o bien isométrico a $C_{a_1, a_2, \dots, a_{k_n}}$ para algún $k_n \geq 2$, con $a_1 = a_2 = \dots = a_{k_n} = N/2$.

Observación 3.1.20. *Nótese que cada G_n en la descomposición de árbol canónica de G es un subgrafo isométrico de G .*

El próximo resultado da que la desigualdad en el Teorema 3.1.15 se alcanza para los grafos G en la clase \mathcal{E}_N , con $N = g(G)$.

Teorema 3.1.21. *Cada grafo G que pertenece a $\mathcal{E}_{g(G)}$ verifica $\delta(G) = g(G)/4$.*

Demostración. Supongamos que G pertenece a $\mathcal{E}_{g(G)}$. Entonces, para cualquier G_n fijo, la Proposición 3.1.19 da que tenemos $\delta(G_n) = 0$ o $\delta(G_n) = g(G)/4$. Como G no es un árbol, existe n_0 con $\delta(G_{n_0}) = g(G)/4$ y $g(G_{n_0}) = g(G)$. Por lo tanto, el Lema 3.1.6 da $\delta(G) = \sup_n \delta(G_n) = g(G)/4$. \square

Los siguientes resultados caracterizan las clases de grafos con bucles o aristas múltiples que alcanzan la igualdad en el Teorema 3.1.15.

Teorema 3.1.22. *Sea G cualquier grafo con cada arista de longitud k y con algún bucle. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\delta(G) = g(G)/4$.
- $A(G)$ es un árbol.
- $\delta(G) = k/4$.
- $\delta(G) < k/2$.

Demostración. Supongamos primero que $\delta(G) = g(G)/4$. Como G tiene al menos un bucle, entonces $g(G) = k$. Por consiguiente, $\delta(G) = g(G)/4 = k/4$, y el Teorema 3.1.9 da que $A(G)$ es un árbol.

Supongamos ahora que $A(G)$ es un árbol. Entonces cada ciclo en G es un bucle. Como G tiene por lo menos un bucle, entonces $g(G) = k$. Como G no es un árbol, el Teorema 3.1.9 da que $\delta(G) = k/4$, y por consiguiente, $\delta(G) = g(G)/4$.

La equivalencia de los tres últimos enunciados es una consecuencia del Teorema 3.1.9, ya que G tiene por lo menos un bucle. □

Teorema 3.1.23. *Sea G cualquier grafo con cada arista de longitud k y con alguna arista múltiple. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\delta(G) = g(G)/4$.
- $B(G)$ es un árbol.
- $\delta(G) = k/2$ y G no tiene bucles.
- $\delta(G) < 3k/4$ y G no tiene bucles.

Demostración. En primer lugar, supongamos que $\delta(G) = g(G)/4$. Busquemos una contradicción, suponiendo que G tiene algún bucle; por lo tanto, el Teorema 3.1.22 da que $A(G)$ es un árbol, y entonces G no tiene aristas múltiples, lo cual es una contradicción. Entonces, G no tiene bucles y $B(A(G)) = B(G)$. Como G tiene por lo menos una arista múltiple, entonces $g(G) = 2k$. Entonces, $\delta(G) = g(G)/4 = k/2$, y el Teorema 3.1.9 da que $B(A(G)) = B(G)$ es un árbol.

Supongamos ahora que $B(G)$ es un árbol. Entonces G no tiene bucles y $B(A(G)) = B(G)$ es un árbol. El Teorema 3.1.9 da que $\delta(G) \in \{0, k/4, k/2\}$. Como G tiene alguna arista múltiple, $\delta(G) \geq g(G)/4 = k/2$ por el Teorema 3.1.15. Por consiguiente, $\delta(G) = g(G)/4 = k/2$.

La equivalencia de los tres últimos enunciados es una consecuencia del Teorema 3.1.9, ya que G tiene por lo menos una arista múltiple y no tiene bucles. □

3.1.3 Relaciones entre la constante de hiperbolicidad, aristas y orden de un grafo

Como el Teorema 3.1.2 da que K_n (para cada $n \geq 4$) y $K_{m,n}$ (para cada $m, n \geq 2$) son grafos con $\delta = k$, se puede pensar que cualquier grafo obtenido adicionando aristas a $K_{m,n}$ debe satisfacer $\delta = k$. Sin embargo, esto es falso, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.1.24. *Sea G un grafo obtenido de $K_{m,n}$ ($m, n \geq 2$) adicionando algunas aristas. Supongamos que existen vértices u, v, w , en la misma parte de $K_{m,n}$ con $[u, v] \in E(G)$ y $[u, w], [v, w] \notin E(G)$. Entonces $\delta(G) = 5k/4$ y $\text{diam } G = 5k/2$.*

Demostración. Consideremos vértices x, y , en la otra parte de $K_{m,n}$, y el ciclo con longitud $5k$ dado por $\{u, x, w, y, v, u\}$. Como $[w, x], [w, y] \in E(G)$ y $[u, w], [v, w] \notin E(G)$, el Teorema 3.1.10 implica que $\delta(G) \geq 5k/4$.

Por lo tanto, el Lema 3.1.4 da $5k/4 \leq \delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diam } G$ y $\text{diam } G \geq 5k/2$. Sea p el punto medio de $[u, v]$; entonces $d(p, w) = d(p, \{u, v\}) + d(\{u, v\}, w) = k/2 + 2k = 5k/2$. Por lo tanto, $\text{diam } G = 5k/2$, y aplicando de nuevo el Lema 3.1.4, obtenemos $\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diam } G = 5k/4$. Entonces concluimos $\delta(G) = 5k/4$. \square

Por otro lado, si tenemos “muchas aristas” en el grafo, entonces se tiene $\delta = k$.

Recordamos que denotamos por $gr(v)$ el grado de un vértice en un grafo.

Proposición 3.1.25. *Sea G un grafo con aristas de longitud k y con $n \geq 4$ vértices. Si $gr(v) \geq n - 2$ para cada vértice $v \in V(G)$, entonces $\delta(G) = k$ y $\text{diam } G = 2k$.*

Demostración. En primer lugar probemos que $\text{diam } G = 2k$.

Consideremos puntos $x, y \in G$ y las aristas $[x_1, x_2], [y_1, y_2] \in E(G)$ con $x \in [x_1, x_2], y \in [y_1, y_2]$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $t := d(x, x_1)$ y $s := d(y, y_1)$ verifican $0 \leq t \leq s \leq k/2$. Si $[x_1, y_1] \in E(G)$, entonces $d(x, y) \leq d(x, x_1) + d(x_1, y_1) + d(y_1, y) = t + k + s \leq 2k$. Si $[x_1, y_1] \notin E(G)$, entonces $[x_1, y_2] \in E(G)$ ya que $gr(x_1) \geq n - 2$, y por consiguiente, $d(x, y) \leq d(x, x_1) + d(x_1, y_2) + d(y_2, y) = t + 2k - s \leq 2k$ ya que $t \leq s$. Por lo tanto, $\text{diam } G \leq 2k$.

Consideremos ahora dos aristas $[a_1, a_2], [b_1, b_2] \in E(G)$, con $a_i \neq b_j$, $1 \leq i, j \leq 2$ (podemos hacerlo ya que $n \geq 4$), y sus puntos medios a de $[a_1, a_2]$ y b de $[b_1, b_2]$. Entonces $d(a, b) = k/2 + d(\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}) + k/2 \geq k/2 + k + k/2 = 2k$. Por lo tanto, $\text{diam } G = 2k$.

El Lema 3.1.4 da ahora que $\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diam } G = k$. Tenemos $gr(v) \geq n - 2 \geq n/2$ para cada vértice $v \in V(G)$, ya que $n \geq 4$; por lo tanto, por el Corolario de Dirac (ver Corolario 1.1.54) existe un ciclo hamiltoniano g en G . Como g es un ciclo en G con longitud $L(g) = nk \geq 4k$, el Teorema 3.1.5 implica que $\delta(G) \geq k$. Por lo tanto, $\delta(G) = k$. \square

Teorema 3.1.26. *Para cada $n \geq 5$ y $1 \leq m \leq n - 2$, sea $G_{n,m}$ el grafo con aristas de longitud k obtenido eliminando m aristas empezando en el mismo vértice del grafo completo K_n . Entonces $\delta(G_{n,m}) = k$ si $m = 1$ ó $m = n - 2$, y $\delta(G_{n,m}) = 5k/4$ si $1 < m < n - 2$.*

Demostración. Si $m = 1$, entonces la Proposición 3.1.25 da que $\delta(G_{n,1}) = k$. Si $m = n - 2$, entonces la descomposición de árbol canónica de $G_{n,m}$ tiene dos componentes: K_{n-1} y una arista; por lo tanto, el Lema 3.1.6 implica $\delta(G_{n,n-2}) = \delta(K_{n-1})$; finalmente, el Teorema 3.1.2 da que $\delta(G_{n,n-2}) = k$.

Supongamos ahora que $1 < m < n - 2$. Sea $u \in V(G_{n,m})$ el vértice con menor grado. Consideremos dos vértices $v, w \in V(G_{n,m})$ con $d(u, v) > k$ y $d(u, w) > k$, y $v', w' \in V(G_{n,m})$ dos vértices con $d(u, v') = k$ y $d(u, w') = k$. Si g es el ciclo $g := \{u, v', v, w, w'\}$, entonces el Teorema 3.1.10 da $\delta(G_{n,m}) \geq 5k/4$.

Probemos ahora que $\text{diam } G_{n,m} = 5k/2$. Es fácil comprobar que $\text{diam } G_{n,m} = \max\{d(u, p) : p \in G_{n,m}\}$ y que $d(u, q) = 5k/2$ si q es el punto medio de v y w . Si p pertenece a alguna arista que empieza en u , entonces $d(u, p) \leq k$; si p no pertenece a las aristas empezando en u , entonces $d(v', p) \leq 3k/2$ y $d(u, p) \leq 5k/2$. Entonces $\text{diam } G_{n,m} = 5k/2$ y el Lema 3.1.4 da $\delta(G_{n,m}) \leq 5k/4$. Por lo tanto, $\delta(G_{n,m}) = 5k/4$. \square

La siguiente familia de grafos permite caracterizar los grafos extremales en el Teorema 3.1.28. Sea \mathcal{F}_n el conjunto de grafos hamiltonianos G de orden n con cada arista de longitud k y tal que existe un ciclo hamiltoniano G_0 que es la unión de dos geodésicas Γ_1, Γ_2 en G con longitud $nk/2$ tales que el punto medio x_0 de Γ_1 satisface $d_G(x_0, \Gamma_2) = nk/4$.

Nótese que los extremos de Γ_1, Γ_2 no tienen que pertenecer a $V(G)$.

Tenemos una descripción precisa de \mathcal{F}_n .

Proposición 3.1.27. *Para $n \geq 3$, consideremos el grafo ciclo C_n con aristas de longitud k . Fijemos un vértice $z \in V(C_n)$ y las geodésicas (en C_n) Γ_1^*, Γ_2^* con longitudes $nk/2$ uniendo el vértice z y el punto w , y con $C_n = \Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*$. Denotemos por w_i^j el vértice en Γ_i^* con $d(w_i^j, z) = jk$, para $i = 1, 2$ y $j \geq 1$ (con $w_i^j \neq w$).*

- Si n es par, tenemos $1 \leq j \leq n/2 - 1$. Entonces un grafo pertenece a \mathcal{F}_n si y sólo si es isomorfo (y por lo tanto, isométrico) a un grafo obtenido adicionando a C_n cualquier cantidad de aristas múltiples y/o bucles y un subconjunto (propio o no) de

$$\{ [w_1^1, w_2^1], [w_1^2, w_2^2], [w_1^{n/2-1}, w_2^{n/2-1}], [w_1^{n/2-1}, w_2^{n/2-2}] \}$$

ó

$$\{ [z, w_2^2], [w_1^{n/2-1}, w_2^{n/2-1}] \}.$$

- Si n es impar, tenemos $1 \leq j \leq (n-1)/2$. Entonces un grafo pertenece a \mathcal{F}_n si y sólo si es isomorfo (y por lo tanto, isométrico) a un grafo obtenido adicionando a C_n cualquier cantidad de aristas múltiples

y/o bucles y un subconjunto (propio o no) de

$$\{ [w_1^1, w_2^1], [w_1^1, w_2^2], [w_1^{(n-1)/2}, w_2^{(n-1)/2-1}] \}.$$

Proof. Supongamos que un grafo G pertenece a \mathcal{F}_n . Tratemos primero el caso n par. Sean x e y los puntos a distancia $nk/2$ en G_0 unidos por las geodésicas (en G) Γ_1, Γ_2 con $G_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Denotemos por v_i^1 el vértice más cercano en Γ_i a x (diferente de x si $x \in V(G)$) y $t_i := d(v_i^1, x) \in (0, k]$, para $i = 1, 2$ (nótese que $t_1 = k$ si y sólo si $t_2 = k$; en otro caso, $t_1 + t_2 = k$). Denotemos también por v_i^j el vértice en Γ_i con $d(v_i^j, v_i^1) = (j-1)k$ y $d(v_i^j, x) > (j-1)k$, para $i = 1, 2$ y $2 \leq j \leq j_x$, donde $v_i^{j_x}$ es el vértice más cercano en Γ_i a y (diferente de y si $y \in V(G)$) (nótese que $d(v_1^{j_x}, y) = t_2$). Si $t_1 = k$, entonces $j_x = n/2 - 1$; si $t_1 \in (0, k)$, entonces $j_x = n/2$.

En primer lugar, nótese que si adicionamos a un grafo en \mathcal{F}_n cualquier cantidad de aristas múltiples y/o bucles, entonces obtenemos también un grafo en \mathcal{F}_n . Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que G no tiene aristas múltiples ni bucles.

Nótese también que en G no existe una arista conectando dos vértices no adyacentes en la misma geodésica Γ_i , para $i = 1, 2$, ya que si existe tal arista entonces Γ_i no sería una geodésica.

Si $t_1 \in (0, k/2)$, entonces en $E(G) \setminus E(G_0)$ no existe una arista que empieza en v_1^1 (nótese que $[v_1^1, v_2^1] \in E(G_0) \subseteq E(G)$): si $[v_1^1, v_2^j] \in E(G)$ con $j \geq 2$, entonces $2k - t_1 \leq jk - t_1 = d(v_2^j, x) \leq d(v_2^j, v_1^1) + d(v_1^1, x) = k + t_1$ y deducimos $t_1 \geq k/2$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $gr(v_1^1) = 2$.

Si $t_1 \in [k/2, k)$, entonces es posible tener $[v_1^1, v_2^2] \in E(G)$, pero no existe ninguna arista empezando en v_1^1 y terminando en v_2^j con $j > 2$: si $[v_1^1, v_2^j] \in E(G)$ con $j > 2$, entonces $3k - t_1 \leq jk - t_1 = d(v_2^j, x) \leq d(v_2^j, v_1^1) + d(v_1^1, x) = k + t_1$ y deducimos $t_1 \geq k$, que es una contradicción. Por lo tanto, $gr(v_1^1) \leq 3$.

Un argumento similar da que si $t_1 = k$, entonces es posible tener $[v_1^1, v_2^1], [v_1^1, v_2^2] \in E(G)$, pero no existe ninguna arista empezando en v_1^1 y terminando en v_2^j con $j > 2k$.

Los resultados similares también se cumplen para el vértice $v_1^{j_x}$.

Si un vértice v_1^j con $2 \leq j \leq j_x - 1$ tiene $gr(v_1^j) \geq 3$, entonces pertenece a una arista que termina en algún vértice de Γ_2 . Pero esto no es posible, ya que entonces $d_G(x_0, \Gamma_2) < nk/4$. Por lo tanto, cada vértice v_1^j con $2 \leq j \leq j_x - 1$ tiene grado 2, y consecuentemente, cada vértice v_2^j con $2 < j < j_x - 1$ también tiene grado 2.

Por lo tanto, hemos probado el resultado si $t_1 = k$ identificando x y z , y considerando el primer conjunto de aristas en el enunciado de la Proposición. Es suficiente tratar con el caso $t_1 = t_2 = k/2$, ya que este caso permite más aristas: si $t_1 \in (0, k/2)$, entonces $gr(v_1^1) = 2$ y si $t_2 \in (0, k/2)$, entonces $gr(v_1^{j_x}) = 2$. En este caso, es posible tener $[v_1^1, v_2^2], [v_1^{n/2}, v_2^{n/2-1}] \in E(G)$; por lo tanto, hemos probado el resultado identificando v_1^1 y z , considerando el segundo conjunto de aristas en el enunciado de la Proposición.

Tratemos ahora el caso n impar. Utilizaremos la misma notación que en el caso n par. Los argumentos anteriores dan que si $t_1 = k$ e identificamos x y z , entonces G es isomorfo a un grafo obtenido adicionando a C_n cualquier cantidad de aristas múltiples y/o bucles y un subconjunto (propio o no) de

$$\{ [w_1^1, w_2^1], [w_1^1, w_2^2], [w_1^{(n-1)/2}, w_2^{(n-1)/2-1}] \}$$

(nótese que en este caso w es el punto medio de $[w_1^{(n-1)/2}, w_2^{(n-1)/2}]$). Ahora, por simetría, es suficiente tratar el caso $t_1 \in (k/2, k)$, y entonces $d(v_1^{(n-1)/2}, y) \in (k/2, k)$. En este caso, los argumentos anteriores dan que es posible tener $[v_1^1, v_2^2], [v_1^{(n-1)/2}, v_2^{(n-1)/2}] \in E(G)$; por lo tanto, hemos probado el resultado identificando v_1^1 y z .

No es difícil comprobar que si un grafo puede ser obtenido adicionando a C_n algunas de estas aristas, entonces pertenece a \mathcal{F}_n . \square

El siguiente resultado da una desigualdad optimal entre el orden de un grafo y su constante de hiperbolicidad. Además, es útil en el estudio de la hiperbolicidad de los grafos complemento (ver [BRST]).

Teorema 3.1.28. *Sea G cualquier grafo con n vértices. Si cada arista tiene longitud k , entonces $\delta(G) \leq nk/4$. Además, si $n \geq 3$ tenemos $\delta(G) = nk/4$ si y sólo si $G \in \mathcal{F}_n$; si $n = 2$, $\delta(G) = k/2$ si y sólo si G tiene una arista múltiple; si $n = 1$, $\delta(G) = k/4$ si y sólo si G tiene un bucle.*

Proof. No es difícil comprobar el resultado para $n = 1$ y $n = 2$. Supongamos ahora que $n \geq 3$.

Sea $T = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ cualquier triángulo geodésico en G . Por el Lema 3.1.16, podemos suponer que T es un ciclo. Como G tiene n vértices y $L(e) = k$ para cada $e \in E(G)$, tenemos $L(T) \leq nk$ y $L(\gamma_j) \leq nk/2$ para $j = 1, 2, 3$. Si $\gamma_1 = [xy]$ y $p \in \gamma_1$, entonces $d(p, \gamma_2 \cup \gamma_3) \leq d(p, \{x, y\}) \leq nk/4$. Por lo tanto $\delta(T) \leq nk/4$, y por consiguiente $\delta(G) \leq nk/4$.

Si $\delta(G) = nk/4$, entonces cada desigualdad en el argumento anterior debe ser una igualdad. Por lo tanto, existe un triángulo geodésico T en G con $L(T) = nk$, y existe una geodésica γ_1 en T tal que $L(\gamma_1) = nk/2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el punto medio x_0 de γ_1 verifica $d_G(x_0, \gamma_2 \cup \gamma_3) = nk/4$; como T es un ciclo, entonces $L(\gamma_2 \cup \gamma_3) = nk/2 = L(\gamma_1)$; por consiguiente, $\Gamma_2 := \gamma_2 \cup \gamma_3$ es una geodésica; definimos $\Gamma_1 := \gamma_1$, y $G_0 := \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = T$. Entonces $d_G(x_0, \Gamma_2) = nk/4$. Además, $L(G_0) = L(T) = nk$, y esto implica que $V(G) = V(G_0)$ y que G_0 es isomorfo a C_n . Por consiguiente, $G \in \mathcal{F}_n$.

Si $G \in \mathcal{F}_n$, entonces existe un biángulo $B = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ tal que $L(\Gamma_1) = L(\Gamma_2) = nk/2$ y el punto medio x_0 de Γ_1 satisface $d_G(x_0, \Gamma_2) = nk/4$. Entonces deducimos que $\delta(T) \geq nk/4$ y $\delta(G) \geq nk/4$. Ya que hemos probado $\delta(G) \leq nk/4$, concluimos $\delta(G) = nk/4$. \square

Nótese que no es posible obtener la desigualdad inversa $\delta(G) \geq cnk$ para ninguna constante positiva c , ya que cualquier árbol T tiene $\delta(T) = 0$.

3.2 Hiperbolicidad en grafos producto cartesiano

A lo largo de toda la sección 3.2 las aristas de los grafos siempre tienen longitud 1.

Los resultados de esta sección 3.2 aparecen en el artículo [MRSV2] publicados en la revista *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*.

En la subsección 3.2.2 de esta tesis encontramos varias cotas inferiores y superiores para la constante hiperbolicidad de $G_1 \times G_2$, involucrando $\delta(G_1)$, $\delta(G_2)$ y los diámetros de G_1 y G_2 ; los principales resultados de esta clase son los Teoremas 3.2.12 y 3.2.16; estos resultados permiten obtener el Teorema 3.2.19, el principal resultado del trabajo, que caracteriza los grafos producto $G_1 \times G_2$ hiperbólicos, en términos de G_1 y G_2 : el grafo producto $G_1 \times G_2$ es hiperbólico si y sólo si G_1 es hiperbólico y G_2 es acotado o G_2 es hiperbólico y G_1 es acotado. También encontramos familias de grafos para las cuales muchas de las desigualdades en la subsección 3.2.2 se alcanzan. Además, en la subsección 3.2.3 obtenemos el valor preciso de la constante hiperbolicidad para varios grafos producto.

3.2.1 La distancia en grafos producto

Antes de iniciar el estudio de la hiperbolicidad de grafos producto, será muy útil estudiar primero la función distancia en los grafos producto.

Definición 3.2.1. Sean G_1, G_2 dos grafos conexos localmente finitos con aristas de longitud 1 sin bucles ni aristas múltiples. Definimos $G_1 \times G_2$ como el grafo con vértices $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ y $[(u_1, u_2), (v_1, v_2)] \in E(G_1 \times G_2)$ si y sólo si tenemos $u_1 = v_1 \in V(G_1)$ y $[u_2, v_2] \in E(G_2)$ o bien $u_2 = v_2 \in V(G_2)$ y $[u_1, v_1] \in E(G_1)$. Consideramos que cada arista de $G_1 \times G_2$ tiene longitud 1.

Observación 3.2.2. Un punto (u, v) pertenece a $G_1 \times G_2$ si y sólo si tenemos $u \in G_1$ y $v \in V(G_2)$ o $v \in G_2$ y $u \in V(G_1)$.

El siguiente resultado permite calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera en $G_1 \times G_2$.

Proposición 3.2.3. Para todo par de grafos G_1, G_2 tenemos:

(a) Si $u_1, v_1 \notin V(G_1)$, $u_1, v_1 \in [a_1, b_1] \in E(G_1)$, y $u_2 \neq v_2$, entonces

$$d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = d_{G_2}(u_2, v_2) + \min\{d_{G_1}(u_1, a_1) + d_{G_1}(v_1, a_1), d_{G_1}(u_1, b_1) + d_{G_1}(v_1, b_1)\}.$$

(b) Si $u_2, v_2 \notin V(G_2)$, $u_2, v_2 \in [a_2, b_2] \in E(G_2)$, y $u_1 \neq v_1$, entonces

$$d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = d_{G_1}(u_1, v_1) + \min\{d_{G_2}(u_2, a_2) + d_{G_2}(v_2, a_2), d_{G_2}(u_2, b_2) + d_{G_2}(v_2, b_2)\}.$$

(c) En otro caso, tenemos

$$d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2).$$

Demostración. Vamos a probar cada ítem por separado.

- Comenzamos con el caso (a). Como $u_1, v_1 \notin V(G_1)$, $u_1, v_1 \in [a_1, b_1] \in E(G_1)$, y $u_2 \neq v_2$, entonces $u_2, v_2 \in V(G_2)$ (por la observación anterior), y los caminos más cortos para ir de (u_1, u_2) a (v_1, v_2) tienen longitudes $d_{G_1}(b_1, u_1) + d_{G_2}(u_2, v_2) + d_{G_1}(b_1, v_1)$, y $d_{G_1}(a_1, u_1) + d_{G_2}(u_2, v_2) + d_{G_1}(a_1, v_1)$; por lo tanto,

$$d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = d_{G_2}(u_2, v_2) + \min\{d_{G_1}(u_1, a_1) + d_{G_1}(v_1, a_1), d_{G_1}(u_1, b_1) + d_{G_1}(v_1, b_1)\}.$$

- Por simetría, también tenemos (b).
- Para probar (c), podemos distinguir los siguientes casos:

- (i) $u_2 = v_2 \in V(G_2)$,
- (ii) $u_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)$,
- (iii) $u_2, v_2 \in V(G_2)$, u_1, v_1 no pertenecen a la misma arista,
- (i') $u_1 = v_1 \in V(G_1)$,
- (ii') $u_2 \in V(G_2), v_1 \in V(G_1)$,
- (iii') $u_1, v_1 \in V(G_1)$, u_2, v_2 no pertenecen a la misma arista.

Es claro que por la observación 3.2.2 que si $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ están en el caso (c), entonces están en (i), (ii), (iii), (i'), (ii') o (iii').

En (i), tenemos

$$d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, u_2)) = d_{G_1 \times \{u_2\}}((u_1, u_2), (v_1, u_2)) = d_{G_1}(u_1, v_1) = d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, u_2).$$

En (ii),

$$\begin{aligned} d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) &= d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (u_1, v_2)) + d_{G_1 \times G_2}((u_1, v_2), (v_1, v_2)) = \\ &= d_{\{u_1\} \times G_2}((u_1, u_2), (u_1, v_2)) + d_{G_1 \times \{v_2\}}((u_1, v_2), (v_1, v_2)) = d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2). \end{aligned}$$

Para probar (iii), sea u cualquier vértice de una geodésica en G_1 uniendo u_1 con v_1 . Entonces

$$\begin{aligned} d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) &= d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (u, u_2)) + d_{G_1 \times G_2}((u, u_2), (u, v_2)) + d_{G_1 \times G_2}((u, v_2), (v_1, v_2)) \\ &= d_{G_1}(u_1, u) + d_{G_2}(u_2, v_2) + d_{G_1}(u, v_1) = d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2). \end{aligned}$$

Los casos (i'), (ii'), (iii') son similares a (i), (ii), (iii), por simetría.

□

Corolario 3.2.4. Para todo par de grafos G_1, G_2 tenemos:

(a) Si $u_1, v_1 \notin V(G_1), u_1, v_1 \in [a_1, b_1] \in E(G_1)$, y $u_2 \neq v_2$, entonces

$$d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \leq d_{G_2}(u_2, v_2) + 1.$$

(b) Si $u_2, v_2 \notin V(G_2), u_2, v_2 \in [a_2, b_2] \in E(G_2)$, y $u_1 \neq v_1$, entonces

$$d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \leq d_{G_1}(u_1, v_1) + 1.$$

Demostración. Basta probar el caso (a), ya que el caso (b) es similar. Nótese que por la Proposición 3.2.3 tenemos

$$d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = d_{G_2}(u_2, v_2) + \min\{d_{G_1}(u_1, a_1) + d_{G_1}(v_1, a_1), d_{G_1}(u_1, b_1) + d_{G_1}(v_1, b_1)\}.$$

Basta probar que $\min\{d_{G_1}(u_1, a_1) + d_{G_1}(v_1, a_1), d_{G_1}(u_1, b_1) + d_{G_1}(v_1, b_1)\} \leq 1$. En efecto, tenemos que $d_{G_1}(u_1, a_1) + d_{G_1}(v_1, a_1) + d_{G_1}(u_1, b_1) + d_{G_1}(v_1, b_1) = 2$; esto implica $d_{G_1}(u_1, a_1) + d_{G_1}(v_1, a_1) \leq 1$ ó $d_{G_1}(u_1, b_1) + d_{G_1}(v_1, b_1) \leq 1$; por lo tanto, $\min\{d_{G_1}(u_1, a_1) + d_{G_1}(v_1, a_1), d_{G_1}(u_1, b_1) + d_{G_1}(v_1, b_1)\} \leq 1$. □

Estos resultados permiten obtener información acerca de las geodésicas en $G_1 \times G_2$.

Corolario 3.2.5. Consideramos la proyección $P_j : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_j$ para $j = 1, 2$.

(a) Si γ es una geodésica que une x e y en $G_1 \times G_2$, entonces para cada $j = 1, 2$ existe una geodésica γ^* en G_j uniendo $P_j(x)$ y $P_j(y)$, con $\gamma^* \subseteq P_j(\gamma)$ y $d_{G_j}(p, \gamma^*) \leq 1/2$ para cada $p \in P_j(\gamma)$.

(b) Si γ es una geodésica que une dos puntos de $G_1 \times G_2$ en el caso (c) de la Proposición 3.2.3, entonces $P_j(\gamma)$ es una geodésica en G_j para $j = 1, 2$.

Teorema 3.2.6. Para todo par de grafos G_1, G_2 tenemos:

(i) $d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2)$, para cada $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V(G_1 \times G_2)$,

(ii) $d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2) \leq d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \leq d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2) + 1$,
para cada $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in G_1 \times G_2$.

Demostración. Es claro que (i) es una consecuencia directa del caso (c) en la Proposición 3.2.3.

Para probar (ii), basta comprobarlo para el caso (a) en la Proposición 3.2.3 (ya que el caso (b) es similar). Esto es equivalente a probar

$$d_{G_1}(u_1, v_1) \leq \min\{d_{G_1}(u_1, a_1) + d_{G_1}(v_1, a_1), d_{G_1}(u_1, b_1) + d_{G_1}(v_1, b_1)\} \leq d_{G_1}(u_1, v_1) + 1.$$

La segunda desigualdad es una consecuencia directa del Corolario 3.2.4. La primera desigualdad es una consecuencia de la desigualdad triangular, ya que

$$d_{G_1}(u_1, v_1) \leq d_{G_1}(a_1, u_1) + d_{G_1}(a_1, v_1), \quad d_{G_1}(u_1, v_1) \leq d_{G_1}(b_1, u_1) + d_{G_1}(b_1, v_1).$$

□

Aunque por el Teorema anterior es fácil comprobar que $\text{diam}_{G_1 \times G_2} V(G_1 \times G_2) = \text{diam}_{G_1} V(G_1) + \text{diam}_{G_2} V(G_2)$, no es tan fácil calcular el $\text{diam}_{G_1 \times G_2}(G_1 \times G_2)$.

Teorema 3.2.7. *Sean los grafos G_1, G_2 . Si $\text{diam}'_G G := \sup\{d_G(u, v), u \in G, v \in V(G)\}$, entonces tenemos $\text{diam}_{G_1 \times G_2}(G_1 \times G_2) = \max\{\text{diam}_{G_1} V(G_1) + \text{diam}_{G_2} G_2, \text{diam}_{G_2} V(G_2) + \text{diam}_{G_1} G_1, \text{diam}'_{G_1} G_1 + \text{diam}'_{G_2} G_2\}$.*

Demostración. Podemos suponer que G_j tiene al menos dos vértices, ya que en otro caso $\text{diam}_{G_1 \times G_2}(G_1 \times G_2) = \text{diam}_{G_j} G_j$, para algún $j \in \{1, 2\}$ y la fórmula se cumple. Las partes (a) y (b) de la Proposición 3.2.3 dan

$$\begin{aligned} & \sup\{d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) : (u_1, u_2) \text{ y } (v_1, v_2) \text{ satisfacen (a) ó (b)}\} \\ & \leq \max\{1 + \text{diam}_{G_1} G_1, 1 + \text{diam}_{G_2} G_2\}. \end{aligned}$$

Como G_j tiene al menos dos vértices, entonces $\text{diam}_{G_j} V(G_j) \geq 1$, $j = 1, 2$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} & \sup\{d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) : (u_1, u_2) \text{ y } (v_1, v_2) \text{ satisfacen (a) ó (b)}\} \\ & \leq \max\{\text{diam}_{G_1} V(G_1) + \text{diam}_{G_2} G_2, \text{diam}_{G_2} V(G_2) + \text{diam}_{G_1} G_1\}. \end{aligned}$$

En el caso (c), tenemos

$$\sup\{d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) : (c) \text{ se cumple}\} = \sup\{d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2) : (c) \text{ se cumple}\}.$$

Denotemos por (i), (ii), (iii), (i'), (ii'), (iii') los casos en la prueba de la Proposición 3.2.3.

Si $u_2 = v_2 \in V(G_2)$, entonces

$$\begin{aligned} & \sup\{d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, u_2)) : (i) \text{ se cumple}\} \leq \sup\{d_{G_1}(u_1, v_1) : u_1, v_1 \in G_1\} \\ & \leq \text{diam}_{G_1} G_1 \leq \text{diam}_{G_1} G_1 + \text{diam}_{G_2} V(G_2). \end{aligned}$$

Si $u_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)$, entonces

$$\begin{aligned} & \sup\{d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) : (ii) \text{ se cumple}\} = \sup\{d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2) : (ii) \text{ se cumple}\} \\ & \leq \sup\{d_{G_1}(u_1, v_1) : u_1 \in V(G_1)\} + \sup\{d_{G_2}(u_2, v_2) : v_2 \in V(G_2)\} \leq \text{diam}'_{G_1} G_1 + \text{diam}'_{G_2} G_2. \end{aligned}$$

Si $u_2, v_2 \in V(G_2)$ y u_1, v_1 no pertenecen a la misma arista, entonces

$$\begin{aligned} & \sup\{d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) : (iii) \text{ se cumple}\} = \sup\{d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2) : (iii) \text{ se cumple}\} \\ & \leq \sup\{d_{G_1}(u_1, v_1) : u_1, v_1 \in G_1\} + \sup\{d_{G_2}(u_2, v_2) : u_2, v_2 \in V(G_2)\} = \text{diam}_{G_1} G_1 + \text{diam}_{G_2} V(G_2). \end{aligned}$$

Los casos (i') , (ii') , (iii') se tratan de la misma manera. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \sup\{d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) : (c) \text{ se cumple}\} \\ & \leq \max\{\text{diam}_{G_1} V(G_1) + \text{diam}_{G_2} G_2, \text{diam}_{G_2} V(G_2) + \text{diam}_{G_1} G_1, \text{diam}'_{G_1} G_1 + \text{diam}'_{G_2} G_2\}. \end{aligned}$$

Combinando (a) , (b) , (c) , deducimos que

$$\begin{aligned} & \text{diam}_{G_1 \times G_2}(G_1 \times G_2) \\ & \leq \max\{\text{diam}_{G_1} V(G_1) + \text{diam}_{G_2} G_2, \text{diam}_{G_2} V(G_2) + \text{diam}_{G_1} G_1, \text{diam}'_{G_1} G_1 + \text{diam}'_{G_2} G_2\}. \end{aligned}$$

Sean $u_1, v_1 \in G_1, u_2, v_2 \in G_2$ tales que $d_{G_1}(u_1, v_1) = \text{diam}'_{G_1} G_1$ y $d_{G_2}(u_2, v_2) = \text{diam}'_{G_2} G_2$ con $u_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)$. Entonces

$$d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2) = \text{diam}'_{G_1} G_1 + \text{diam}'_{G_2} G_2.$$

Sean ahora $u_1, v_1 \in V(G_1)$ tales que $d_{G_1}(u_1, v_1) = \text{diam}_{G_1} V(G_1)$, y elijamos $u_2, v_2 \in G_2$ tales que $d_{G_2}(u_2, v_2) = \text{diam}_{G_2} G_2$ (obsérvese que u_2, v_2 no están en el interior la misma arista), entonces

$$d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2) = \text{diam}_{G_1} V(G_1) + \text{diam}_{G_2} G_2.$$

Cambiando el papel de u_1, v_1 y u_2, v_2 también obtenemos

$$d_{G_1 \times G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2) = \text{diam}_{G_1} G_1 + \text{diam}_{G_2} V(G_2).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \text{diam}_{G_1 \times G_2}(G_1 \times G_2) \\ & \geq \max\{\text{diam}_{G_1} V(G_1) + \text{diam}_{G_2} G_2, \text{diam}_{G_2} V(G_2) + \text{diam}_{G_1} G_1, \text{diam}'_{G_1} G_1 + \text{diam}'_{G_2} G_2\}. \end{aligned}$$

Esta desigualdad completa la prueba. \square

Podemos deducir varios resultados del Teorema 3.2.7. El primero dice que $\text{diam}_{G_1} G_1 + \text{diam}_{G_2} G_2$ es una buena aproximación para el diámetro de $G_1 \times G_2$.

Corolario 3.2.8. *Para todo par de grafos G_1, G_2 tenemos:*

$$\text{diam}_{G_1} G_1 + \text{diam}_{G_2} G_2 - 1 \leq \text{diam}_{G_1 \times G_2}(G_1 \times G_2) \leq \text{diam}_{G_1} G_1 + \text{diam}_{G_2} G_2.$$

Demostración. Siempre tenemos

$$\begin{aligned} & \max\{\text{diam}_{G_1} V(G_1) + \text{diam}_{G_2} G_2, \text{diam}_{G_2} V(G_2) + \text{diam}_{G_1} G_1, \text{diam}'_{G_1} G_1 + \text{diam}'_{G_2} G_2\} \\ & \leq \text{diam}_{G_1} G_1 + \text{diam}_{G_2} G_2. \end{aligned}$$

Por otra parte, cada grafo G con aristas de longitud 1 satisface

$$\text{diam}_G G \leq \text{diam}'_G G + 1/2, \quad \text{diam}_G G \leq \text{diam}_G V(G) + 1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \text{diam}_{G_1} G_1 + \text{diam}_{G_2} G_2 - 1 \\ & \leq \max\{\text{diam}_{G_1} V(G_1) + \text{diam}_{G_2} G_2, \text{diam}_{G_2} V(G_2) + \text{diam}_{G_1} G_1, \text{diam}'_{G_1} G_1 + \text{diam}'_{G_2} G_2\}, \end{aligned}$$

y el Teorema 3.2.7 da el resultado. \square

Además, podemos caracterizar los grafos para los que el diámetro de $G_1 \times G_2$ es igual a $\text{diam}_{G_1} G_1 + \text{diam}_{G_2} G_2$.

Corolario 3.2.9. *La igualdad*

$$\text{diam}_{G_1 \times G_2}(G_1 \times G_2) = \text{diam}_{G_1} G_1 + \text{diam}_{G_2} G_2$$

se cumple si y sólo si $\text{diam}_{G_1} G_1 = \text{diam}_{G_1} V(G_1)$, ó $\text{diam}_{G_2} G_2 = \text{diam}_{G_2} V(G_2)$, ó $\text{diam}_{G_j} G_j = \text{diam}'_{G_j} G_j$ para $j = 1, 2$.

Corolario 3.2.10. *Si T es cualquier árbol y G un grafo cualquiera, entonces*

$$\text{diam}_{T \times G}(T \times G) = \text{diam}_T T + \text{diam}_G G.$$

3.2.2 Cotas para la constante de hiperbolicidad en grafos producto

El Corolario 3.2.8 y el Teorema 3.1.4 dan el siguiente resultado.

Corolario 3.2.11. *Para todo par de grafos G_1, G_2 , tenemos*

$$\delta(G_1 \times G_2) \leq \frac{1}{2}(\text{diam}_{G_1} G_1 + \text{diam}_{G_2} G_2),$$

y la desigualdad es optimal.

El Teorema 3.2.26 ofrece una familia de ejemplos para la que la igualdad se alcanza en el Corolario 3.2.11: $P_m \times C_n$ con $m - 1 \leq \lfloor n/2 \rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.

Tenemos la siguiente cota superior para $\delta(G_1 \times G_2)$.

Teorema 3.2.12. *Para todo par de grafos G_1, G_2 tenemos*

$$\delta(G_1 \times G_2) \leq \min\left\{ \max\{1/2 + \text{diam}_{G_2} V(G_2), \delta(G_1) + \text{diam}'_{G_2} G_2\}, \right. \\ \left. \max\{1/2 + \text{diam}_{G_1} V(G_1), \delta(G_2) + \text{diam}'_{G_1} G_1\} \right\},$$

y la desigualdad es optimal.

Demostración. Por simetría, basta demostrar $\delta(G_1 \times G_2) \leq \max\{1/2 + \text{diam}_{G_2} V(G_2), \delta(G_1) + \text{diam}'_{G_2} G_2\}$. Podemos suponer que $\text{diam}_{G_2} V(G_2) \geq 1$, ya que si G_2 tiene un sólo vértice, entonces $G_1 \times G_2$ es isométrico a G_1 y la desigualdad es directa. Si $\delta(G_1) + \text{diam}'_{G_2} G_2 = \infty$, entonces la desigualdad se cumple. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que G_1 es hiperbólico y G_2 está acotado. Sea $T_0 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ cualquier triángulo geodésico en $G_1 \times G_2$.

Sea P_1 la proyección $P_1 : G_1 \times G_2 \rightarrow G_1$ y $\gamma'_j := P_1(\gamma_j)$. Por el Corolario 3.2.5 existen geodésicas $\gamma_j^* \subseteq \gamma'_j$ ($j = 1, 2, 3$) que unen las imágenes por P_1 de los vértices de T_0 , tales que γ_j^* está contenida en una $1/2$ -vecindad de γ_j^* , para $j = 1, 2, 3$.

Supongamos primero que $\gamma'_1 = \gamma_1^*$, es decir que γ'_1 es una geodésica en G_1 . Consideremos el triángulo geodésico $T^* = \{\gamma'_1, \gamma_2^*, \gamma_3^*\}$. Como G_1 es hiperbólico, entonces $d_{G_1}(a, \gamma_2^* \cup \gamma_3^*) \leq \delta(G_1)$, para cada $a \in \gamma'_1$. Sea ahora $(u, v) \in G_1 \times G_2$ cualquier punto en γ_1 . Consideremos $p \in \gamma_2^* \cup \gamma_3^* \subseteq \gamma'_2 \cup \gamma'_3$ con $d_{G_1}(u, \gamma_2^* \cup \gamma_3^*) = d_{G_1}(u, p) \leq \delta(G_1)$ y $q \in G_2$ con $(p, q) \in \gamma_2 \cup \gamma_3$.

Si u, p pertenecen al interior de la misma arista $[a_1, b_1] \in E(G_1)$, entonces $v, q \in V(G_2)$. Si $v = q$, entonces

$$d_{G_1 \times G_2}((u, v), \gamma_2 \cup \gamma_3) \leq d_{G_1 \times G_2}((u, v), (p, v)) = d_{G_1}(u, p) < 1 \leq \text{diam}_{G_2} V(G_2) + 1/2.$$

Si $v \neq q$, entonces $[a_1, b_1] \times \{q\} \subseteq \gamma_2 \cup \gamma_3$, ya que en otro caso existe un punto de γ_1 en el interior de la arista $[a_1, b_1] \times \{q\}$ y, por lo tanto, γ'_1 no es una geodésica en G_1 . Por consiguiente,

$$d_{G_1 \times G_2}((u, v), \gamma_2 \cup \gamma_3) \leq d_{G_1 \times G_2}((u, v), [a_1, b_1] \times \{q\}) \leq \text{diam}_{G_2} V(G_2) + 1/2.$$

Si v, q pertenecen al interior de la misma arista $[a_2, b_2] \in E(G_2)$, entonces el Corolario 3.2.4 da

$$d_{G_1 \times G_2}((u, v), (p, q)) \leq d_{G_1}(u, p) + 1 \leq \delta(G_1) + \text{diam}_{G_2} V(G_2).$$

Si u, p no pertenecen al interior de la misma arista en G_1 y v, q no pertenecen al interior de la misma arista en G_2 , entonces la Proposición 3.2.3 da

$$d_{G_1 \times G_2}((u, v), (p, q)) = d_{G_1}(u, p) + d_{G_2}(v, q).$$

Supongamos que $d_{G_2}(v, q) \leq \text{diam}'_{G_2} G_2$; entonces $d_{G_1 \times G_2}((u, v), (p, q)) \leq \delta(G_1) + \text{diam}'_{G_2} G_2$.

Supongamos ahora que $d_{G_2}(v, q) > \text{diam}'_{G_2} G_2$; entonces v, q no son vértices de G_2 , y q pertenece al interior

de una arista $[a_3, b_3] \in E(G_2)$. Si (p, a_3) ó (p, b_3) pertenece a $\gamma_2 \cup \gamma_3$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que (p, a_3) pertenece a $\gamma_2 \cup \gamma_3$, y tenemos

$$d_{G_1 \times G_2}((u, v), \gamma_2 \cup \gamma_3) \leq d_{G_1 \times G_2}((u, v), (p, a_3)) = d_{G_1}(u, p) + d_{G_2}(v, a_3) \leq \delta(G_1) + \text{diam}'_{G_2} G_2.$$

Si $(p, a_3), (p, b_3) \notin \gamma_2 \cup \gamma_3$, entonces $\gamma_2 \cup \gamma_3 \subset \{p\} \times [a_3, b_3]$ y, por lo tanto, $\gamma_1 \subset \{p\} \times [a_3, b_3]$. Por consiguiente, tenemos $d_{G_1 \times G_2}((u, v), \gamma_2 \cup \gamma_3) = 0$.

Supongamos ahora que γ'_1 no es una geodésica en G_1 . Por la Proposición 3.2.3, γ_1 une dos puntos (u_1, u_2) y (v_1, v_2) con u_1, v_1 en el interior de alguna arista $[\alpha_1, \beta_1]$ y $u_2, v_2 \in V(G_2)$; además, $L(\gamma_1) \leq 1 + d_{G_2}(u_2, v_2) \leq 1 + \text{diam}_{G_2} V(G_2)$.

Si $(u, v) \in \gamma_1$, entonces $d_{G_1 \times G_2}((u, v), \gamma_2 \cup \gamma_3) \leq L(\gamma_1)/2 \leq (1 + \text{diam}_{G_2} V(G_2))/2$.

Por lo tanto, $\delta(T_0) \leq \max\{1/2 + \text{diam}_{G_2} V(G_2), \delta(G_1) + \text{diam}'_{G_2} G_2\}$, para cada triángulo geodésico T_0 en $G_1 \times G_2$, y por consiguiente

$$\delta(G_1 \times G_2) \leq \max\{1/2 + \text{diam}_{G_2} V(G_2), \delta(G_1) + \text{diam}'_{G_2} G_2\}.$$

Para comprobar que la desigualdad se puede alcanzar, basta con observar que la desigualdad en el Teorema 3.2.14 es optimal (ver comentario tras Teorema 3.2.14). \square

Tenemos las siguientes consecuencias del Teorema 3.2.12.

Teorema 3.2.13. *Para todo par grafos G_1, G_2 tenemos*

$$\begin{aligned} \delta(G_1 \times G_2) &\leq \min\{\max\{1/2, \delta(G_1)\} + \text{diam}'_{G_2} G_2, \max\{1/2, \delta(G_2)\} + \text{diam}'_{G_1} G_1\} \\ &\leq 1/2 + \min\{\delta(G_1) + \text{diam}'_{G_2} G_2, \delta(G_2) + \text{diam}'_{G_1} G_1\}. \end{aligned}$$

La siguiente cota para la constante de hiperbolicidad será muy útil. Es una consecuencia del Teorema 3.2.12 y la desigualdad $\text{diam}'_G G \leq \text{diam}_G V(G) + 1/2$.

Teorema 3.2.14. *Si T es cualquier árbol y G cualquier grafo, entonces*

$$\delta(T \times G) \leq \text{diam}_G V(G) + 1/2,$$

y la desigualdad es optimal.

El Teorema 3.2.22 da que la igualdad en el Teorema 3.2.14 se alcanza para cada árbol y cada grafo con $\text{diam}_T T > \text{diam}_G V(G)$.

Teorema 3.2.15. *Para todo par de grafos G_1, G_2 que no son árboles tenemos*

$$\delta(G_1 \times G_2) \leq \min\{\delta(G_1) + \text{diam}'_{G_2} G_2, \delta(G_2) + \text{diam}'_{G_1} G_1\}.$$

Demostración. El Teorema 3.1.9 da que si G no es un árbol, entonces $\delta(G) \geq 3/4$. Este hecho y el Teorema 3.2.12 dan el resultado. \square

También tenemos las siguientes cotas inferiores para $\delta(G_1 \times G_2)$.

Teorema 3.2.16. *Para todo par de grafos G_1, G_2 tenemos:*

- (a) $\delta(G_1 \times G_2) \geq \max\{\delta(G_1), \delta(G_2)\}$,
- (b) $\delta(G_1 \times G_2) \geq \min\{\text{diam}_{G_1} V(G_1), \text{diam}_{G_2} V(G_2)\}$,
- (c) $\delta(G_1 \times G_2) \geq \min\{\text{diam}_{G_1} V(G_1), \text{diam}_{G_2} V(G_2)\} + 1/2$, si $\text{diam}_{G_1} V(G_1) \neq \text{diam}_{G_2} V(G_2)$,
- (d) $\delta(G_1 \times G_2) \geq \frac{1}{2} \min\{\delta(G_1) + \text{diam}_{G_2} V(G_2), \delta(G_2) + \text{diam}_{G_1} V(G_1)\}$.

Además, las desigualdades en (b) y (c) se alcanzan, como se muestra en el primer y el segundo ítem del Teorema 3.2.25.

Demostración. La parte (a) es inmediata: $G_1 \times \{v\}$ y $\{u\} \times G_2$ son subgrafos isométricos de $G_1 \times G_2$ para cada $(u, v) \in V(G_1 \times G_2)$; entonces el Lema 3.1.1 da que $\delta(G_1 \times G_2) \geq \delta(G_1 \times \{v\}) = \delta(G_1)$ y $\delta(G_1 \times G_2) \geq \delta(\{u\} \times G_2) = \delta(G_2)$. Por lo tanto, obtenemos $\delta(G_1 \times G_2) \geq \max\{\delta(G_1), \delta(G_2)\}$.

Para probar (b), sea $D := \min\{\text{diam}_{G_1} V(G_1), \text{diam}_{G_2} V(G_2)\}$. Si $D < \infty$, consideremos un cuadrado geodésico $K := \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ en $G_1 \times G_2$ con lados de longitud D ; entonces $T := \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma\}$ es un triángulo geodésico en $G_1 \times G_2$, donde $\gamma := \gamma_3 \cup \gamma_4$. Es claro que el punto medio $p = \gamma_3 \cap \gamma_4$ de γ satisface $d_{G_1 \times G_2}(p, \gamma_1 \cup \gamma_2) = D$; por lo tanto $\delta(T) \geq D$, y por consiguiente $\delta(G_1 \times G_2) \geq D$. Si $D = \infty$, podemos repetir el mismo argumento para cualquier entero N en lugar de D , y obtenemos $\delta(G_1 \times G_2) \geq N$, para cada N ; por lo tanto, $\delta(G_1 \times G_2) = \infty = D$.

Para probar (c), podemos suponer que $D < \infty$, ya que si $D = \infty$ entonces la parte (b) da el resultado. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\text{diam}_{G_1} V(G_1) < \text{diam}_{G_2} V(G_2)$. Consideremos un rectángulo geodésico $R := \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$ en $G_1 \times G_2$ con $L(\sigma_1) = L(\sigma_3) = \text{diam}_{G_1} V(G_1)$ y $L(\sigma_2) = L(\sigma_4) = \text{diam}_{G_2} V(G_2)$. Entonces $B := \{\sigma, \gamma\}$ es un biángulo geodésico en $G_1 \times G_2$, donde $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\gamma := \sigma_3 \cup \sigma_4$. Sea p el punto en σ_2 con $d_{G_1 \times G_2}(p, \sigma_1 \cap \sigma_2) = 1/2$; entonces

$$d_{G_1 \times G_2}(p, \gamma) = 1/2 + \text{diam}_{G_1} V(G_1) = 1/2 + \min\{\text{diam}_{G_1} V(G_1), \text{diam}_{G_2} V(G_2)\}.$$

Por consiguiente, $\delta(G_1 \times G_2) \geq \delta(B) \geq 1/2 + \min\{\text{diam}_{G_1} V(G_1), \text{diam}_{G_2} V(G_2)\}$.

Para probar (d), sea $E := \max\{\delta(G_1), \delta(G_2)\}$. Entonces, a partir de (a) y (b), tenemos

$$\begin{aligned} \delta(G_1 \times G_2) &\geq \max\{D, E\} \geq \frac{1}{2}(D + E) = \frac{1}{2} \min\{\text{diam}_{G_1} V(G_1) + E, \text{diam}_{G_2} V(G_2) + E\}, \\ &\geq \frac{1}{2} \min\{\text{diam}_{G_1} V(G_1) + \delta(G_2), \delta(G_1) + \text{diam}_{G_2} V(G_2)\}. \end{aligned}$$

□

Nótese que los apartados (a) y (d) jugarán un papel cualitativo importante en el resto del trabajo.

El Corolario 3.2.11 y el Teorema 3.2.16 permiten dar cotas inferiores y superiores para $\delta(G_1 \times G_2)$ sólo en términos de distancias en G_1 y G_2 .

Corolario 3.2.17. *Para todo par de grafos G_1, G_2 tenemos*

$$\min\{\text{diam}_{G_1} V(G_1), \text{diam}_{G_2} V(G_2)\} \leq \delta(G_1 \times G_2) \leq \frac{1}{2}(\text{diam}_{G_1} G_1 + \text{diam}_{G_2} G_2).$$

Los Teoremas 3.2.13 y 3.2.16 dan que $\delta(G_1 \times G_2)$ es equivalente, de una forma precisa, a $\min\{\delta(G_1) + \text{diam}_{G_2} G_2, \delta(G_2) + \text{diam}_{G_1} G_1\}$.

Corolario 3.2.18. *Para todo par de grafos G_1, G_2 tenemos*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \min\{\delta(G_1) + \text{diam}_{G_2} V(G_2), \delta(G_2) + \text{diam}_{G_1} V(G_1)\} \\ & \leq \delta(G_1 \times G_2) \leq \frac{1}{2} + \min\{\delta(G_1) + \text{diam}'_{G_2} G_2, \delta(G_2) + \text{diam}'_{G_1} G_1\}. \end{aligned}$$

El Corolario 3.2.18 permite obtener uno de los resultados más importantes de la tesis: la caracterización de la hiperbolicidad de los grafos producto.

Teorema 3.2.19. *Para todo par de grafos G_1, G_2 tenemos que $G_1 \times G_2$ es hiperbólico si y sólo si un factor es hiperbólico y el otro factor está acotado.*

Este resultado se puede generalizar a n grafos.

Corolario 3.2.20. *Para todo conjunto de n grafos G_1, \dots, G_n tenemos que $G_1 \times \dots \times G_n$ es hiperbólico si y sólo si uno de estos factores es hiperbólico y el resto está acotado.*

Muchos parámetros γ de los grafos satisfacen la desigualdad $\gamma(G_1 \times G_2) \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$. Por ejemplo, $\kappa(G_1 \times G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_2)$ y $\lambda(G_1 \times G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_2)$, donde denotamos, respectivamente, por $\kappa(G)$ y $\lambda(G)$ la conectividad de vértices y la arista-conectividad de G (ver [XY]). Por lo tanto, uno podría pensar que la desigualdad $\delta(G_1 \times G_2) \geq \delta(G_1) + \delta(G_2)$ se cumple para todo par de grafos G_1, G_2 . Sin embargo, esto es falso, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.21. $\delta(P \times C_3) < \delta(P) + \delta(C_3)$, donde P es el grafo de Petersen.

Demostración. Tenemos que

$$\text{diam}_P V(P) = 2, \text{diam}'_P P = 5/2, \text{diam}_P P = 3, \text{diam}_{C_3} V(C_3) = 1, \text{diam}'_{C_3} C_3 = \text{diam}_{C_3} C_3 = 3/2.$$

Por los Teoremas 3.1.2, 3.1.4 y 3.2.7, obtenemos $\delta(P \times C_3) \leq 2 < 3/2 + 3/4 = \delta(P) + \delta(C_3)$. □

3.2.3 Cálculo de la constante de hiperbolicidad para algunos grafos producto

Obtenemos en esta subsección el valor de la constante de hiperbolicidad para muchos grafos producto.

Teorema 3.2.22. *Sean T cualquier árbol y G cualquier grafo. Entonces*

$$\delta(T \times G) = \begin{cases} (\text{diam}_T T + \text{diam}_G G)/2, & \text{si } \text{diam}_T T = \text{diam}_G V(G) > \text{diam}_G G - 1, \\ \text{diam}_G V(G) + 1/2, & \text{si } \text{diam}_T T > \text{diam}_G V(G). \end{cases}$$

Demostración. Si $\text{diam}_T T > \text{diam}_G V(G)$, entonces la fórmula es una consecuencia directa del Teorema 3.2.14 y del tercer ítem del Teorema 3.2.16

Supongamos ahora que $\text{diam}_T T = \text{diam}_G V(G) > \text{diam}_G G - 1$. En primer lugar, nótese que el Corolario 3.2.11 da $\delta(T \times G) \leq (\text{diam}_T T + \text{diam}_G G)/2$. Para probar la otra desigualdad, consideremos dos casos: $\text{diam}_G G = \text{diam}_G V(G)$ y $\text{diam}_G G = \text{diam}_G V(G) + 1/2$.

Si $\text{diam}_G G = \text{diam}_G V(G)$, entonces $\text{diam}_G G = \text{diam}_T T$ y el segundo apartado del Teorema 3.2.16 da

$$\delta(T \times G) \geq \text{diam}_T T = \frac{1}{2}(\text{diam}_T T + \text{diam}_G G).$$

Si $\text{diam}_G G = \text{diam}_G V(G) + 1/2$, entonces existen $v \in V(G)$ y $w \in [a, b] \in E(G)$ con $d_G(v, w) = \text{diam}_G G$ (nótese que w es el punto medio de $[a, b]$). Sean γ_a, γ_b dos geodésicas que unen v y w , con $a \in \gamma_a$ y $b \in \gamma_b$.

Sean $u_1, u_2 \in V(T)$ tales que $d_T(u_1, u_2) = \text{diam}_T T$. Definamos $\sigma_1 := [u_2 u_1] \times \{v\} \cup \{u_1\} \times \gamma_a$, $\sigma_2 := \{u_1\} \times [wb] \cup [u_1 u_2] \times \{b\} \cup \{u_2\} \times [bv]$; σ_1 y σ_2 son geodésicas que unen (u_2, v) y (u_1, w) con longitud $\text{diam}_T T + \text{diam}_G G$. Si p es el punto medio de σ_1 , es fácil comprobar que $d_{T \times G}(p, V(T \times G)) = 1/4$ y $\delta(T \times G) \geq d_{T \times G}(p, \sigma_2) = (\text{diam}_T T + \text{diam}_G G)/2$. \square

Nótese que $\delta(T \times G) = (\text{diam}_T T + \text{diam}_G G)/2$ no se cumple para todo árbol T y todo grafo G con $\text{diam}_T T = \text{diam}_G V(G) = \text{diam}_G G - 1$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.23. *Sea G cualquier grafo obtenido a partir de dos grafos G_1, G_2 isomorfos a C_3 mediante la identificación de un vértice de G_1 con un vértice de G_2 . Es evidente que $\text{diam}_G V(G) = 2$ y $\text{diam}_G G = 3$. Se puede comprobar que $\delta(P_3 \times G) = 9/4 < 5/2 = (\text{diam}_{P_3} P_3 + \text{diam}_G G)/2$.*

Teorema 3.2.24. *Sean K_n el grafo completo con $n \geq 4$ y T cualquier árbol con al menos 3 vértices. Entonces $\delta(T \times K_n) = 3/2$.*

Demostración. El resultado es una consecuencia del Teorema 3.2.22, ya que

$$\text{diam}_T T \geq 2 > 1 = \text{diam}_{K_n} V(K_n).$$

\square

Teorema 3.2.25. *Los siguientes grafos tienen estos valores precisos de δ :*

- $\delta(P_n \times P_n) = n - 1$, para cada $n \geq 2$.
- $\delta(P_m \times P_n) = \min\{m, n\} - 1/2$, para cada $m, n \geq 2$ con $m \neq n$.
- $\delta(Q_n) = n/2$, para cada $n \geq 2$.
- $\delta(C_m \times C_n) = (m + n)/4$, para cada $m, n \geq 3$.
- $\delta(T_1 \times T_2) = \delta(P_{1+\text{diam } T_1} \times P_{1+\text{diam } T_2})$, para cualesquiera árboles T_1, T_2 , es decir,

$$\delta(T_1 \times T_2) = \begin{cases} \text{diam}_{T_1} T_1, & \text{si } \text{diam}_{T_1} T_1 = \text{diam}_{T_2} T_2, \\ \min\{\text{diam}_{T_1} T_1, \text{diam}_{T_2} T_2\} + 1/2, & \text{si } \text{diam}_{T_1} T_1 \neq \text{diam}_{T_2} T_2. \end{cases}$$

Demostración. Los dos primeros puntos y el último son consecuencias directas del Teorema 3.2.22.

Para demostrar el tercer punto, en primer lugar vamos a demostrar por inducción que $\text{diam}_{Q_n} Q_n = n$. Para $n = 1$, tenemos $\text{diam}_{Q_1} Q_1 = \text{diam}_{P_2} P_2 = 1$. Ahora supongamos que $\text{diam}_{Q_n} Q_n = n$; ya que $Q_{n+1} = Q_n \times P_2$, por el Teorema 3.2.7 deducimos que $\text{diam}_{Q_{n+1}} Q_{n+1} = n + 1$. Por lo tanto, hemos probado que $\text{diam}_{Q_n} Q_n = n$. Por consiguiente, el Lema 3.1.4 da que $\delta(Q_n) \leq n/2$. Para probar la otra desigualdad, consideremos Q_n contenido en $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Definamos dos vectores n -dimensional x_i, y_i para cada $0 \leq i \leq n$ como sigue:

$x_i = (0, \dots, 0, \overbrace{1, \dots, 1}^i)$ tiene i -veces “1” en las i últimas componentes y “0” en el resto de las componentes, $y_i = (\overbrace{1, \dots, 1}^i, 0, \dots, 0)$ tiene i -veces “1” en las i primeras componentes y “0” en el resto de las componentes.

Consideremos los caminos $\gamma_1 := x_0, x_1, \dots, x_n$, $\gamma_2 := y_0, y_1, \dots, y_n$. Si $n = 2p$, definimos $z := x_p$; entonces $d_{Q_n}(x_p, y_p) = n$ y $d_{Q_n}(x_p, y_j) = n - |p - j| \geq n/2$ para $0 \leq j \leq n$. Si $n = 2p + 1$, definimos $z := \frac{x_p + x_{p+1}}{2}$; entonces

$$d_{Q_n}(z, y_j) = 1/2 + \min\{d_{Q_n}(x_p, y_j), d_{Q_n}(x_{p+1}, y_j)\} =$$

$$= \min\{n - 1 - |p - j|, n - 1 - |p + 1 - j|\} + 1/2 = n - \min\{|p - j|, |p + 1 - j|\} - 1/2 \geq n/2 \text{ para } 0 \leq j \leq n.$$

Consideremos el biángulo $B = \gamma_1 \cup \gamma_2$. En cualquier caso, tenemos que el punto medio z de γ_1 está a distancia $n/2$ de γ_2 ; por lo tanto, $\delta(Q_n) \geq n/2$ y, por consiguiente, $\delta(Q_n) = n/2$.

Consideremos el grafo $C_m \times C_n$. El Corolario 3.2.9 da $\text{diam}_{C_m \times C_n}(C_m \times C_n) = (m + n)/2$. Así, el Lema 3.1.4 da $\delta(C_m \times C_n) \leq (m + n)/4$.

Denotemos por u_1, u_2, \dots, u_m (respectivamente, v_1, v_2, \dots, v_n) los vértices (consecutivos) en C_m (respectivamente, en C_n) con $d_{C_m}(u_i, u_{i+1}) = 1$ para cada $1 \leq i \leq m - 1$ (respectivamente, $d_{C_n}(v_j, v_{j+1}) = 1$ para cada $1 \leq j \leq n - 1$).

Primero, supongamos que m o n es par; por simetría, sin pérdida de generalidad podemos suponer que m es par.

Si n es par, sea $z = v_{n/2+1}$; entonces definimos

$$\gamma_1 := [u_1 u_{m/2+1}] \times \{v_1\} \cup \{u_{m/2+1}\} \times [v_1 z] \text{ (con } u_2 \in [u_1 u_{m/2+1}] \text{ y } v_2 \in [v_1 z])$$

y

$$\gamma_2 := [u_{m/2+1} u_1] \times \{z\} \cup \{u_1\} \times [z v_1] \text{ (con } u_m \in [u_{m/2+1} u_1] \text{ y } v_n \in [z v_1]).$$

Si n es impar, sea z el punto medio de $[v_{(n+1)/2}, v_{(n+3)/2}]$; entonces

$$\gamma_1 := [u_1 u_{m/2+1}] \times \{v_1\} \cup \{u_{m/2+1}\} \times [v_1 z] \text{ (con } u_2 \in [u_1 u_{m/2+1}] \text{ y } v_2 \in [v_1 z])$$

y

$$\gamma_2 := \{u_{m/2+1}\} \times [z v_{(n+3)/2}] \cup [u_{m/2+1} u_1] \times \{v_{(n+3)/2}\} \cup \{u_1\} \times [v_{(n+3)/2} v_1] \text{ (con } u_m \in [u_{m/2+1} u_1]).$$

Tenemos que $B = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ es un biángulo y $L(\gamma_1) = L(\gamma_2) = (m + n)/2$. Si p es el punto medio de γ_1 , entonces $d_{C_m \times C_n}(p, \gamma_2) = (m + n)/4$; por lo tanto, $\delta(C_m \times C_n) \geq \delta(B) \geq (m + n)/4$.

Supongamos ahora que m, n son impares. Sean w el punto medio de $[u_{(m+1)/2}, u_{(m+3)/2}]$ y z el punto medio de $[v_{(n+1)/2}, v_{(n+3)/2}]$; entonces definimos

$$\gamma_1 := [w u_1] \times \{v_1\} \cup \{u_1\} \times [v_1 z] \text{ (con } u_2 \in [w u_1] \text{ y } v_2 \in [v_1 z])$$

y

$$\gamma_2 := \{u_1\} \times [z v_{(n+3)/2}] \cup [u_1 u_{(m+3)/2}] \times \{v_{(n+3)/2}\} \cup \{u_{(m+3)/2}\} \times [v_{(n+3)/2} v_1] \cup [u_{(m+3)/2} w] \times \{v_1\}.$$

Tenemos que $L(\gamma_1) = L(\gamma_2) = (m + n)/2$. Si p es el punto medio de γ_1 , entonces $d_{C_m \times C_n}(p, \gamma_2) = (m + n)/4$; por lo tanto, $\delta(C_m \times C_n) \geq \delta(B) \geq (m + n)/4$.

Entonces concluimos en cualquier caso que $\delta(C_m \times C_n) = (m + n)/4$.

□

Teorema 3.2.26.

$$\delta(P_m \times C_n) = \begin{cases} (m - 1 + n/2)/2, & \text{si } m - 1 \leq [n/2], \\ [n/2] + 1/2, & \text{si } m - 1 > [n/2], \end{cases}$$

para cada $m \geq 2, n \geq 3$, donde $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.

Demostración. En primer lugar, por el Teorema 3.2.22 si $m - 1 > \lfloor n/2 \rfloor$, entonces $\delta(P_m \times C_n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1/2$.

Ahora supongamos que $m - 1 \leq \lfloor n/2 \rfloor$ y definamos $\{x\} := \min\{|x - y| : y \in \mathbb{Z}\}$. El Teorema 3.2.7 da que $\text{diam}_{P_m \times C_n}(P_m \times C_n) = m - 1 + n/2$; por lo tanto, el Lema 3.1.4 da $\delta(P_m \times C_n) \leq (m - 1 + n/2)/2$.

Para probar la otra desigualdad, denotemos por u_1, u_2, \dots, u_m (respectivamente, v_1, v_2, \dots, v_n) los vértices de P_m (respectivamente, los vértices de C_n) con $d_{P_m}(u_i, u_{i+1}) = 1$ para cada $1 \leq i \leq m - 1$ (respectivamente, $d_{C_n}(v_j, v_{j+1}) = 1$ para cada $1 \leq j \leq n - 1$). Sean $x := v_1$ e y los puntos en C_n tal que $d_{C_n}(x, y) = n/2$. Definamos las geodésicas $\sigma_1 := [(u_m, x)(u_1, x)] \cup [(u_1, x)(u_1, y)]$, donde $[(u_1, x)(u_1, y)]$ es la geodésica que contiene a (u_1, v_2) , $\sigma_2 := [(u_1, y)(u_m, y)] \cup [(u_m, y)(u_m, x)]$ si n es par (con $(u_m, v_{n-1}) \in [(u_m, y)(u_m, x)]$), y $\sigma_2 := [(u_1, y)(u_1, v_{(n+3)/2})] \cup [(u_1, v_{(n+3)/2})(u_m, v_{(n+3)/2})] \cup [(u_m, v_{(n+3)/2})(u_m, x)]$ si n es impar; nótese que σ_1 y σ_2 son geodésicas de longitud $m - 1 + n/2$.

Ahora consideremos el biángulo $B = \{\sigma_1, \sigma_2\}$. Entonces el punto medio p de σ_1 satisface

$$d_{P_m \times C_n}(p, \sigma_2) = \min\{(m - 1 + n/2)/2, \lfloor n/2 \rfloor + \{(m - 1 + n/2)/2\}\};$$

por lo tanto,

$$\delta(P_m \times C_n) \geq \min\{(m - 1 + n/2)/2, \lfloor n/2 \rfloor + \{(m - 1 + n/2)/2\}\}.$$

Mostraremos ahora que $(m - 1 + n/2)/2 \leq \lfloor n/2 \rfloor + \{(m - 1 + n/2)/2\}$. Si n es par, entonces $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$ y $m - 1 \leq n/2$; por lo tanto, $m - 1 + n/2 \leq n$ y

$$(m - 1 + n/2)/2 \leq n/2 = \lfloor n/2 \rfloor \leq \lfloor n/2 \rfloor + \{(m - 1 + n/2)/2\}.$$

Si n es impar, entonces $\lfloor n/2 \rfloor = (n - 1)/2$ y $(m - 1 + n/2)/2 \in (\mathbb{N} + 1/4) \cup (\mathbb{N} + 3/4)$; por lo tanto, $\{(m - 1 + n/2)/2\} = 1/4$, $m - 1 + n/2 \leq (n - 1)/2 + n/2 = n - 1 + 1/2$ y

$$(m - 1 + n/2)/2 \leq (n - 1)/2 + 1/4 = \lfloor n/2 \rfloor + \{(m - 1 + n/2)/2\}.$$

Por lo tanto, $\delta(P_m \times C_n) \geq (m - 1 + n/2)/2$ y concluimos que $\delta(P_m \times C_n) = (m - 1 + n/2)/2$. \square

Conclusiones

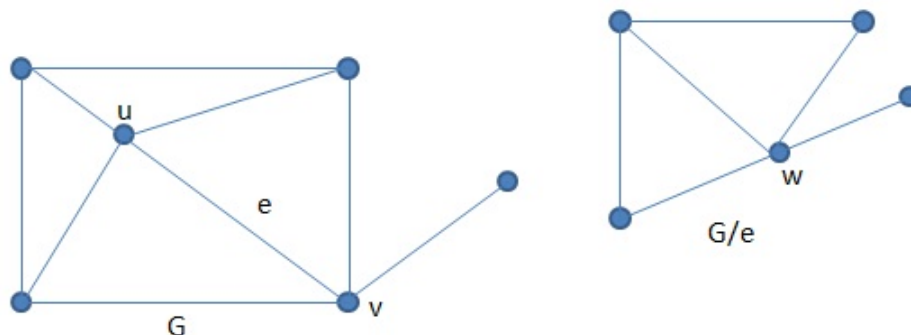
En esta tesis se estudia la hiperbolicidad de grafos. Conseguimos relacionar la constante de hiperbolicidad con otros parámetros del grafo como el orden, el cuello y el diámetro. En algunos casos, se dan fórmulas cerradas para la constante de hiperbolicidad y, en general, obtenemos cotas optimales no triviales para dicha constante. En el caso de los grafos producto cartesiano, obtenemos una caracterización en términos de sus factores: son hiperbólicos si y sólo si un factor es hiperbólico y el otro es acotado.

El volumen y la calidad de los resultados presentados en esta tesis nos ha permitido elaborar los dos artículos [\[MRSV1\]](#) y [\[MRSV2\]](#), publicados en revistas internacionales que se incluyen en el JCR. Además, los principales resultados han sido dados a conocer mediante la presentación de diversas comunicaciones en congresos nacionales e internacionales.

Problemas abiertos y futuros trabajos

Definición 3.2.27. Si $G = (V, E)$ es un grafo y $e = [u, v] \in E$, se denota por G/e al grafo que resulta de la contracción de e a un punto, es decir, que u y v se eliminan y se sustituyen por un nuevo vértice w , adyacente a todos los vértices que eran adyacentes a u ó a v .

El siguiente ejemplo muestra un grafo G y el resultado de contraer una arista e a un punto



- Un futuro trabajo sería relacionar la constante de hiperbolicidad del grafo que resulta de la contracción (por una o por varias aristas) con la constante de la hiperbolicidad del grafo original.
- Otro desafío sería, re-desarrollar la teoría de espacios hiperbólicos de Gromov para grafos dirigidos con aristas de longitud arbitraria. Estos grafos no son espacios métricos (dado que la “distancia” en ellos no es necesariamente simétrica) y, por lo tanto, no es posible aplicar en ellos la teoría de espacios hiperbólicos. Esta nueva teoría tendría aplicaciones al estudio de la seguridad en internet.
- En esta tesis hemos podido dar una caracterización muy sencilla de los grafos con constante de hiperbolicidad $\delta < k$ (ver Teorema 3.1.9). Creemos que podemos ampliar el rango de valores de δ para los que se obtenga la caracterización; en particular, el primer objetivo sería caracterizar todos los grafos con $\delta < 7k/4$.

- En el Teorema 3.2.14 hemos encontrado una cota superior para la constante de hiperbolicidad del producto cartesiano de un árbol y un grafo. Además, sabemos por el Teorema 3.2.22 que dicha cota se alcanza bajo ciertas condiciones. Un futuro objetivo sería encontrar el valor exacto de $\delta(T \times G)$ para todo árbol T y todo grafo G .

Bibliografía

- [AS] Ahlfors, L. V., Sario, L., Riemann Surfaces. Princeton University Press, Princeton, 1960.
- [AHL] Alon, N., Hoory, S., Linial, N., The Moore bound for irregular graphs. *Graphs and Combinatorics*, **18**(1):53–57, 2002.
- [ABCD] Alonso, J., Brady, T., Cooper, D., Delzant, T., Ferlini, V., Lustig, M., Mihalik, M., Shapiro, M., Short, H., Notes on word hyperbolic groups, in: E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky (Eds.), *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [APRT] Alvarez, V., Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., Gromov hyperbolicity of Denjoy domains, *Geom. Dedicata* **121** (2006), 221-245.
- [An] Anderson, J. W., *Hyperbolic Geometry*, Springer, London, 1999.
- [Ar] Arzhantseva, G. N., On Quasiconvex Subgroups of Word Hyperbolic Groups, *Geometriae Dedicata* **87**: 191-208, 2001.
- [BB1] Balogh, Z. M., Bonk, M., Gromov hyperbolicity and the Kobayashi metric on strictly pseudoconvex domains, *Comment. Math. Helv.* **75** (2000), 504-533.
- [BB2] Balogh, Z. M., Bonk, M., pseudoconvexity and Gromov hyperbolicity, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 328, Skrie I, p. 597-602, 1999.
- [BB3] Balogh, Z. M., Buckley, S. M., Geometric characterizations of Gromov hyperbolicity, *Invent. Math.* **153** (2003), 261-301.
- [Be] Beardon, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag, New York, 1983.

- [BP] Beardon, A. F., Pommerenke, Ch., The Poincaré metric of a plane domain, *J. London Math. Soc. (2)* **18** (1978), 475-483.
- [B] Benoist, Y., Convexes hyperboliques et fonctions quasimétriques, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **97** (2003), 181-237.
- [BRST] Bermudo, S., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Touris, E., Hyperbolicity and complement of graphs, Enviado para su publicación.
- [BRSV1] Bermudo, S., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Vilaire, J.-M., Gromov hyperbolic graphs, Enviado para su publicación.
- [BRSV2] Bermudo, S., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Vilaire, J.-M., *Mathematical properties of Gromov hyperbolic graphs. AIP Conference Proceedings*. Vol. **1281** (2010), 575-578.
- [BF] Bertrand, F., Sharp estimates of the Kobayashi metric and Gromov hyperbolicity. *J. Math. Anal. Appl.* **345** (2008), 825-844.
- [Bl] Bollobás, B., Modern Graph Theory. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1998.
- [BM] Bondy, J. A., Murty, U.S.R., Graph Theory with Applications. Macmillan Press, London, 1976.
- [Bo] Bonk, M., Quasi-geodesics segments and Gromov hyperbolic spaces, *Geometriae Dedicata* **62** (1996), 281-298.
- [BHK] Bonk, M., Heinonen, J., Koskela, P., Uniformizing Gromov hyperbolic spaces. *Astérisque* **270**, 2001.
- [BS] Bonk, M., Schramm, O., Embeddings of Gromov hyperbolic spaces, *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), 266-306.
- [BHB] Bowditch, B. H., Notes on Gromov's hyperbolicity criterion for path-metric spaces. Group theory from a geometrical viewpoint, Trieste, 1990 (ed. E. Ghys, A. Haefliger and A. Verjovsky; World Scientific, River Edge, NJ, 1991) 64-167.
- [BKM] Brinkmann, G., Koolen J., Moulton, V., On the hyperbolicity of chordal graphs, *Ann. Comb.* **5** (2001), 61-69.
- [Bu] Buser, P., Geometry and Spectra of Compact. *Progress in Mathematics*, Volume 106. Birkhäuser, 1992.

- [Ca] Carleson, L., A remark on Picard's theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.* **67** (1961), 142-144.
- [CG] Chartrand, G., Lesniak, L., Graphs and digraphs, 3rd ed., Chapman and Hall, London, 1996.
- [CS] Chiue, W.-S., Shieh, B.-S., On connectivity of the Cartesian product of two graphs, *Appl. Math. Comput.* **102** (1999) 129–137.
- [CDEHV] Chepoi, V., Dragan, F. F., Estellon, B., Habib, M., Vaxes Y., Notes on diameters, centers, and approximating trees of δ -hyperbolic geodesic spaces and graphs, *Electr. Notes Discrete Math.* **31** (2008), 231-234.
- [CDP] Coornaert, M., Delzant, T., Papadopoulos, A., Géométrie et théorie des groupes. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1441, Springer, Berlin, 1991.
- [De] Deo, N., Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Printice-Hall of India, New Delhi, 1974.
- [DR] Diestel, R., Graph Theory, Springer-Verlag, New York 1997, 2000, 2005.
- [D] Dirac, G .A., Généralisation du théorème de Menger, *C .R. Acad. Sci. Paris* **250** (26) (1960), 4252-4253.
- [EL] Espinoza, R.G., Lluch, A.B., Introducción a la Teoría de Grafos, Editorial Equinoccio, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela, 1997.
- [F] Fefferman, C., The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, *Invent. Math.* **26** (1974), 1-65.
- [Fe] Fenchel, W., Elementary Geometry in Hyperbolic Space. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1989.
- [Fi] Fisher, S., Function theory on planar domains. Ed. John Wiley & Sons, 1983.
- [FS] Foertsch, T., Schroeder, V., A product construction for hyperbolic metric spaces, *Illinois J. Math.* **49** (2005), 793-810.
- [Fo] Foster, O., Lectures on Riemann surfaces. Ed. Springer-Verlag, 1977.
- [Fl] Foulds, L. R., Graph theory applications, Springer-Verlag, 1992.
- [FSi] Frigerio, R., Sisto, A., Characterizing hyperbolic spaces and real trees, *Geom. Dedicata* **142** (2009), 139-149.

- [GHL] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J., Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1987.
- [GH] Ghys, E., de la Harpe, P., Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov, *Progress in Mathematics*, Volume 83. Birkhäuser, 1990.
- [GR] Goddard, W., Raines, M.E., Slater, P.J., Distance and connectivity measures in permutation graphs, *Discr. Math.* **271** (2003), 61-70.
- [G1] Gromov, M., Hyperbolic groups, in "Essays in group theory". Edited by S. M. Gersten, M. S. R. I. Publ. **8**. Springer, 1987, 75-263.
- [G2] Gromov, M. (with appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes), Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Progress in Mathematics, vol. 152. Birkhäuser, 1999.
- [Ha] Hästö, P. A., Gromov hyperbolicity of the j_G and \tilde{j}_G metrics, *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), 1137-1142.
- [HLPRT] Hästö, P., Linden, H., Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., Gromov hyperbolicity of Denjoy domains with hyperbolic and quasihyperbolic metrics. Aceptado en *J. Math. Soc. Japan* [arXiv:0806.0097v1]
- [HPRT] Hästö, P., Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., Gromov hyperbolic equivalence of the hyperbolic and quasihyperbolic metrics in Denjoy domains. *B. London Math. Soc.* **42** (2010), 282-294.
- [HPRT1] Hästö, P., Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., Comparative Gromov hyperbolicity results for the hyperbolic and quasihyperbolic metrics, *Complex Var. Ellip. Eq.* **55** (2010), 127-135.
- [HPRT2] Hästö, P., Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., Uniformly separated sets and Gromov hyperbolicity of domains with the quasihyperbolicity metric. Aceptado en *Mediterr. J. Math.* Publicado electrónicamente DOI: 10.1007/s00009-010-0059-7
- [H] Hejhal, D. A., Universal Covering Maps for Variable Regions, *Math. Z.* **137** (1974), 7-20.
- [HJ] Howie, J., Hyperbolic Groups, Lecture Notes, Heriot-Watt University, Edinburgh EH14 4AS
- [J] Jonckheere, E., Contrôle du trafic sur les réseaux à géométrie hyperbolique, *J. Europ. Syst. Autom.* **8** (2002), 45-57.

- [JL1] Jonckheere, E. A., Lohsoonthorn, P., A hyperbolic geometry approach to multipath routing, *Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2002)*, Lisbon, Portugal, July 2002. FA5-1.
- [JL2] Jonckheere, E. A., Lohsoonthorn, P., Geometry of network security, *American Control Conference ACC* (2004), 111-151.
- [JLB] Jonckheere, E. A., Lohsoonthorn, P., Bonahon, F., Scaled Gromov hyperbolic graphs, *Journal of Graph Theory* **2** (2007), 157-180.
- [JLA] Jonckheere, E. A., Lohsoonthorn, P., Ariaei, F., Upper bound on scaled Gromov-hyperbolic δ , *Applied Mathematics and Computation* **192** (2007) 191–204
- [JS] Jones, G. A., Singerman, D., Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [K] Kanai, M., Rough isometries and combinatorial approximations of geometries of noncompact Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **37** (1985), 391-413.
- [K1] Kapovich, I., Benakli, N., Boundaries of hyperbolic groups, *Contemporary Mathematics*. Submitted on 27 Feb 2002
- [Ko] Kobayashi, S., Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, *Marcel Dekker, Inc.*, New York, 1970.
- [KM] Koolen, J. H., Moulton, V., Hyperbolic Bridged Graphs, *Europ. J. Combinatorics* **23** (2002), 683-699.
- [Kr1] Krantz, S. G., Complex analysis: the geometric viewpoint, *Carus Mathematical Monographs*, M.A.A., Washington, 1990.
- [Kr2] Krantz, S. G., Geometric Function Theory, Birkhäuser, Washington, 2006.
- [Lh] Lindén, H., Gromov hyperbolicity of conformal invariant metrics, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica* Volumen 32, 2007, 279–288
- [L] Lopéz, J. M., Dimensión Assoud-Nagata y la geometría a gran escala de grupos numerables. Tesis Doctoral dirigida por Dydak, J., Sanjurjo, J. M., Universidad Complutense de Madrid, 2009.
- [M] Massey, W., Introducción a la topología algebraica, *Ed. Reverté*, Barcelona, 1972.

- [Mat] Matsumoto, K., Exceptional values of meromorphic functions in a neighborhood of the set of singularities, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A* **24** (1960), 143-153.
- [MRT] Melián, M. V., Rodríguez, J. M., Tourís, E., Escaping geodesics in Riemannian surfaces with variable negative curvature. En preparación.
- [MRSV1] Michel, J., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Villeta, M., Hyperbolicity and parameters of graphs, aceptado en *Ars Combinatoria*.
- [MRSV2] Michel, J., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Villeta, M., Gromov Hyperbolicity in cartesian product graphs, *Proceedings Indian Acad. Sci. (Mathematical Sciences)* **120** (2010), 1-17.
- [NR] Niblo, Graham A., Roller Martin A., Geometric Group Theory Gromov Hyperbolicity in cartesian product graphs. Volume 2: Asymptotic Invariants of Infinite Groups, M. Gromov
- [Or1] Ore, O., Graphs and their uses, Volumen 34, *published in Washington by the mathematical association of America*, 1963.
- [Or2] Ore, O., Theory of graphs, *American mathematical society providence*, 1962, R.I.
- [O] Oshika, K., Discrete groups, *AMS Bookstore*, 2002.
- [P] Paulin, F., On the critical exponent of a discrete group of hyperbolic isometries, *Diff. Geom. Appl.* **7** (1997), 231-236.
- [Pi] Piazza, B., Edge-connectivity of permutation graphs, *Congr. Numer.* **65** (1988), 7-16.
- [Po] Portilla, A., *Superficies de Riemann hiperbólicas en sentido de Gromov*. Tesis Doctoral dirigida por Rodríguez, J. M., Universidad Carlos III de Madrid, 2005.
- [PRSV] A. Portilla, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta, J.-M. Vilaire, Gromov hyperbolicity of tessellation graphs. Enviado para su publicación.
- [PRT1] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., Gromov hyperbolicity through decomposition of metric spaces II, *J. Geom. Anal.* **14** (2004), 123-149.
- [PRT2] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., The topology of balls and Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces. *Diff. Geom. Appl.* **21** (2004), 317-335.

- [PRT3] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís E., The role of funnels and punctures in the Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **49** (2006), 399-425.
- [PRT4] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., A real variable characterization of Gromov hyperbolicity of flute surfaces. Aceptado en *Osaka J. Math.* [arXiv:0806.0093v1]
- [PRT] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., Stability of Gromov hyperbolicity, *J. Adv. Math. Studies* **2** (2009), 1-20.
- [PT] Portilla, A., Tourís, E., A characterization of Gromov hyperbolicity of surfaces with variable negative curvature, *Publ. Mat.* **53** (2009), 83-110.
- [R] Rodríguez, J. M., *Superficies de Riemann bass, función de Green y extensión holomorfa*. Tesis Doctoral dirigida por José Luis Fernández. Universidad Autónoma de Madrid, 1991.
- [RST] Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Tourís, E., Teoría geométrica de funciones: el punto de encuentro entre la variable compleja y la geometría. XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS, Ediciones IVIC (Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas), Caracas (Venezuela), 2010.
- [RSVV] Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Vilaire, J.-M., Villeta, M., On the hyperbolicity constant in graphs, aceptado en *Discrete Math.*
- [RT1] Rodríguez, J. M., Tourís, E., Gromov hyperbolicity through decomposition of metric spaces, *Acta Math. Hung.* **103** (2004), 53-84.
- [RT2] Rodríguez, J. M., Tourís, E., A new characterization of Gromov hyperbolicity for Riemann surfaces, *Publ. Mat.* **50** (2006), 249-278.
- [RT3] Rodríguez, J. M., Tourís, E., Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces, *Acta Math. Sinica* **23** (2007), 209-228.
- [Ro] Royden, H. L., The Picard theorem for Riemann surfaces, *Proc. Am. Math. Soc.* **90** (1984), 571-574.
- [Ru] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.
- [Se] Sela, Z., The isomorphism problem for hyperbolic groups. *I*, *Ann. of math. (2)* **141** (1995), no. 2, 217-283. MR **96b**: 20049

- [Sh] Shiga, H., On the boundary behavior of holomorphic mappings of plane domains to Riemann surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.* **4** (1989), 643-651.
- [Suz] Suzuki, M., Comportement des applications holomorphes autour d'un ensemble polaire, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 304, Série I, **8** (1987), 191-194
- [Top] Toppila, S., On exceptional values of functions meromorphic outside a linear set., *Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I.* **5** (1980), 115-119.
- [TFA] Toranzos, F. A., Introducción a la Teoría de Grafos. Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina.
- [T1] Tourís, E., Espacios hiperbólicos en sentido de Gromov. Tesis Doctoral dirigida por Rodríguez, J. M. Universidad Carlos III de Madrid, 2004.
- [T2] Tourís, E., Graphs and Gromov hyperbolicity of non-constant negatively curved surfaces, *J. Math. Anal. Appl.* En prensa.
- [Ts] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959.
- [V] Väisälä, J., Gromov hyperbolic spaces, *Expo. Math.* **23** (2005), 187-231.
- [VC] Vernicos, C. Acte du seminaire de Theorie Spectral et Géométrie, Volume 23(2004-2005), p. 145-168
- [VC1] Vernicos, C. Introduction aux géométrie de Hilbert, Volume 23 (2005) 145-168
- [We] Wenger, S., Gromov Hyperbolic Spaces and the sharp isoperimetric constant. Submitted on 11 Sep 2006, revised 1 Feb 2007
- [W] Wikipedia, página http://en.wikipedia.org/wiki/Negatively_curved_group
- [Wo] Wolf, J., Spaces of Constant Curvature. 4th ed., Publish or Perish Press, Berkeley, 1977.
- [ZW] Wu, Y., Zhang, C., Chordality and hyperbolicity of a graph. Enviado para su publicación. arXiv:0910.3544v3
- [XY] Xu, J-M., Yang, C., Connectivity of Cartesian product graphs, *Discrete Mathematics* **306** (2006) 159 – 165
- [XXX] Xu, M., Xu, J-M., Hou, X-M., Fault diameter of Cartesian product graphs, *Information Processing Letters* **93** (2005) 245–248