III Olimpiada Matemática de Andalucía

20 de marzo de 2021

Problemas

1. Sean $x, y \geq 0$ números reales verificando $x + y = 2$. Prueba que se verifica

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2.$$

2. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que $p(2018)p(2019) = 2021$. Probar que no existe ningún entero k tal que $p(k) = 2020$.

3. Sea ABC un triángulo con $\widehat{B} = 60^{\text{o}}$, $\widehat{C} = 80^{\text{o}}$. Sea D un punto interior al triángulo, tal que $\widehat{DBC} = 40^{\text{o}}$ y $\widehat{BCD} = 70^{\text{o}}$. Demuestra que AD es perpendicular a BC.

4. Dos jugadores A y B compiten en el siguiente juego. Se establece un número entero de puntos $N_0 \geq 2$, elegido al azar. El jugador A resta de ese número inicial R_1 puntos, a su elección, con la condición de que $1 \leq R_1 \leq \frac{N_0}{2}$. Por tanto, $N_1 = N_0 - R_1$ es la cantidad de puntos restantes. El jugador B retira R_2 puntos, a su elección, de esa cantidad N_1 restante con la similar condición de que $1 \leq R_2 \leq \frac{N_1}{2}$. Se continúa así alternadamente hasta que uno de los jugadores deja un único punto, en cuyo caso pierde la partida y la gana el jugador contrario.
Justifique cuándo existe una estrategia ganadora para cada jugador. Si N_0 recorre todos los valores entre 2 y 2^{2021} y ambos jugadores siguen su estrategia ganadora, deduzca en cuántos casos ganará cada uno.