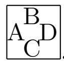
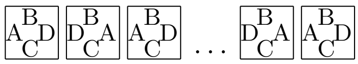
V Olimpíada Matemática de Andalucía

Granada–Sevilla, 18 de febrero de 2023

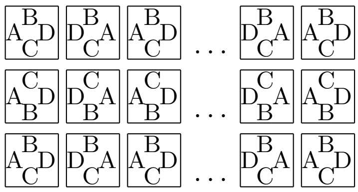
Problemas. Soluciones

1. Tenemos piezas cuadradas de tamaño 1×1 en las que podemos pintar cada borde de un color A, B, C, D, no repitiéndose colores en cada pieza.
Formamos un rectángulo $n \times m$ pegando piezas cuadradas con la condición de que los bordes que se pegan son del mismo color.
¿Para qué números n y m es esto posible si en cada lado del rectángulo los bordes de las piezas que lo forman son del mismo color, y en los cuatro lados del rectángulo aparecen los cuatro colores?

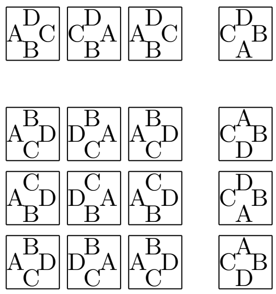
Solución. Vamos a representar un cuadro por .
Supongamos que tenemos un rectángulo de n filas y m columnas.
Si m es impar podemos tenemos la siguiente construcción cuando $n = 1$.



Si $n = 3$, tendremos:



Por tanto podremos construir rectángulos $n \times m$ con m y n impares.
Si m y n son pares, construimos uno $(n-1)(m-1)$ y además una fila $1 \times n$ y una columna $m \times 1$ en la forma obvia. Veamos un ejemplo de 4×4.



Si uno es par y otro es impar, veamos qué ocurre. Uno de los lados del rectángulo tiene longitud impar, sea n (el número de filas), y supongamos que tenga el color A. Si consideramos una fila cualquiera, resulta que, sin contar el borde, el número de aristas A que aparece es par (van por parejas), por tanto en cada fila tenemos un número impar de aristas iguales a A, y como hay un número impar de filas, resulta que en total hay un número impar de aristas iguales a A.
Por otro lado hay $n \times m$ piezas, y por tanto $n \times m$ aristas iguales a A, un número par. Es evidente que tenemos una contradicción.

2. Determina todos los números enteros positivos primos p, q, r, que verifican: $p+q+r = 2023$ y $pqr + 1$ es un cuadrado perfecto.

Solución. Supongamos que $p \leq q \leq r$, y analicemos los distintos casos.

- $p = 2 < q, r$. Tenemos que $q + r = 2021$, lo que es imposible ya que ambos son números impares.
- $p = 2 = q < r$. Tenemos $r = 2019$, que no es primo.
- Como consecuencia, los tres números primos verifican: $2 < p \leq q \leq r$.

Se verifica $pqr + 1 = n^2$, por tanto $pqr = n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$

<u>Caso 1</u>: $p|n - 1$.

- Si $qr|n + 1$, entonces $p = n - 1$ y $qr = n + 1$, y se tiene $qr - p = 2$, lo que es imposible.
- Si $q|n + 1$, $r \nmid n + 1$, entonces $pr = n - 1$ y $q = n + 1$, y se tiene $q - pr = 2$, lo que es imposible.
- Si $r|n + 1$, $q \nmid n + 1$, entonces $pq = n - 1$ y $r = n + 1$, y se tiene $pq = r - 2 = (2023 - p - q) - 2 = 2021 - p - q$. Por tanto $pq + p + q = 2021$, y $(p + 1)(q + 1) = 2021 + 1 = 2022 = 2 \times 3 \times 337$.

  * $p + 1 = 2 \times 3 = 6$, $q + 1 = 337$. Se deduce que $q = 336$ que no es primo.
  * $p + 1 = 3$, $q + 1 = 2 \times 337 = 674$. Se deduce que $q = 673$, que es primo, y $r = pq - 2 = 2 \times 673 - 2$ que no es primo ya que es par.
  * $p + 1 = 2$, $q + 1 = 3 \times 337 = 1011$. Se deduce que $p = 1$ que no es primo.

  no existen primos p y q verificando esta relación.
- Si $n + 1 = 1$, entonces $n = 0$, lo que es imposible.

<u>Caso 2</u>: $p|n + 1$.

- Si $n - 1 = qr$, como $p = n + 1$, llegamos a una contradicción con $2 < p \leq q \leq r$.
- Si $n - 1 = q$, tenemos $n + 1 = pr$, y se tiene $pr - q = 2$, lo que es imposible.
- Si $n - 1 = r$, tenemos $n + 1 = pq$, y se tiene $pq = r + 2 = (2023 - p - q) + 2 = 2025 - p - q$, Por tanto $pq + p + q = 2025$, y se tiene $(p+1)(q+1) = 2026 = 2 \times 1013$. Como consecuencia, $p + 1 = 2$ y $q + 1 = 1013$, de donde se tiene $p = 1$ y $q = 1012$, que no son primos, por tanto no existen primos p y q verificando esta relación.
- Si $n - 1 = 1$, entonces $n + 1 = pqr$ y $n = 2$, esto es, $pqr = 2^2 - 1 = 3$, lo que es imposible.

Conclusión, no existen primos positivos p, q, r verificando estas condiciones.

3. Encontrar todas las funciones crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tales que para cada $m, n \in \mathbb{N}$:

$$f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2,$$

Se recuerda que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *y que una función* f *es creciente cuando* $f(m) \leq f(n)$ *si* $m < n$.

Solución. De la condición del enunciado, aplicada a $m = n = 0$ se deduce que $f(0) = 2f(0)^2$. Por tanto $f(0) = 0$ o $f(0) = 1/2$.

Caso 1: $f(0) = 1/2$
De la condición del enunciado para $n = 0$, se deduce que, para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$f(m^2) = f(m)^2 + 1/4.$$

En particular, para $m = 1$, se obtiene $f(1) = 1/2$. Aplicando la condición para $m = n = 1$, se obtiene también $f(2) = 1/2$. Además, en general, si $f(2^p) = 1/2$, entonces

$$f(2^{2p+1}) = f(2^{2p} + 2^{2p}) = f[(2^p)^2 + (2^p)^2] = f(2^p)^2 + f(2^p)^2 = 1/2$$

Por ser f creciente, se tiene que $f(2^{p+1}) = 1/2$. Es decir, hemos probado por inducción que la imagen por f de todas las potencias de 2 es constante. Como todo número natural está entre dos potencias de 2, la condición de f creciente implica que f es la función constante igual a $1/2$.

Caso 2: $f(0) = 0$
Aplicando la condición del enunciado a $n = 0$, se tiene que pa

$$f(m^2) = f(m)^2, \forall m \in \mathbb{N}$$

En particular, $f(1) = f(1)^2$, por lo que $f(1) = 0$ o $f(1) = 1$.

Caso 2.1: $f(1) = 0$. Se deduce que $f(2) = f(1+1) = f(1)^2 + f(1)^2 = 0$. De modo análogo al caso 1, se obtiene aquí que f es la función constante igual a 0.

Caso 2.2: $f(1) = 1$. De la condición del enunciado se calculan fácilmente: $f(2) = 2, f(4) = 4, f(5) = 5, f(8) = 8, f(16) = 16, f(25) = 25, f(100) = 100$. De estos últimos se obtiene: $25 = f(25) = f(3)^2 + f(4)^2 = f(3)^2 + 16$, de donde se deduce que $f(3) = 3$. También $100 = f(100) = f(36 + 64) = f(6)^2 + 64$, de donde se deduce que $f(6) = 6$. Pretendemos probar que, en este caso, $f(n) = n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por reducción al absurdo, supongamos que sea $n = 2k + 1$, con $k > 2$ el menor número tal que $f(n) \neq n$. Aplicando f a la siguiente igualdad

$$(2k + 1)^2 + (k - 2)^2 = (2k - 1)^2 + (k + 2)^2$$

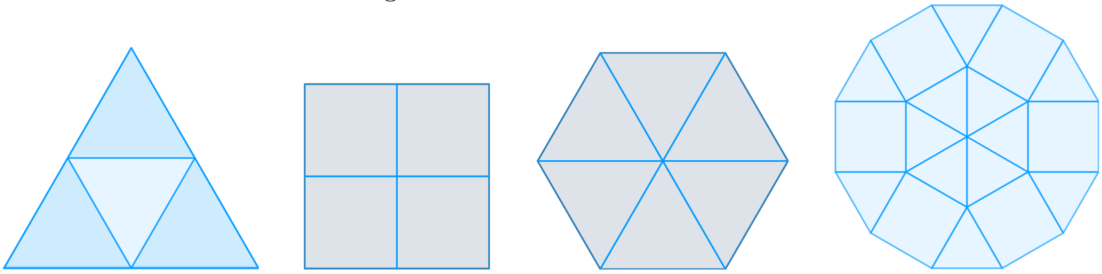
se alcanza una contradicción, ya que los números $k - 2, 2k - 1, k + 2$ son números menores que $2k + 1$. En el caso par, sea $n = 2k + 2$ con $k \geq 4$ el menor número tal que $f(n) \neq n$. Ahora se aplica f a la siguiente igualdad

$$(2k + 2)^2 + (k - 4)^2 = (2k - 2)^2 + (k + 4)^2$$

y se razona de la misma manera.

4. Encuentra todos los números naturales $n \geq 3$ para los que es posible rellenar un polígono regular de n lados con al menos dos polígonos regulares sin solapamientos (los polígonos del recubrimiento pueden tener distinto número de lados).

Solución. Los únicos casos posibles son $n = 3, 4, 6$ y 12.
Para esos casos tenemos las siguientes soluciones



A continuación veamos que no existen más soluciones.
Consideremos P un polígono regular de n lados y un recubrimiento con dos o más polígonos regulares sin solapamientos. Sea v un vértice de P. El ángulo cuyo vértice es v tiene magnitud $180 - \frac{360}{n}$ grados. Este ángulo debe ser recubierto con ángulos interiores de otros polígonos, por tanto $180 - \frac{360}{n}$ debe poderse escribir como suma de ángulos de otros polígonos de la forma $180 - \frac{360}{n_i}$, es decir,

$$180 - \frac{360}{n} = \sum_{i=1}^{r} \left(180 - \frac{360}{n_i}\right).$$

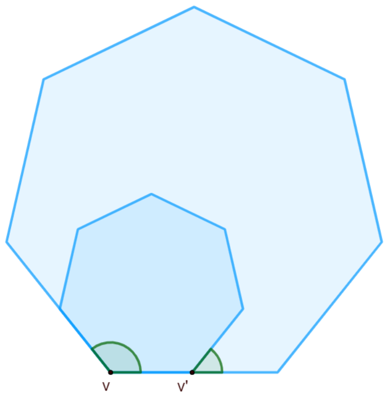
Teniendo en cuenta que el menor ángulo posible es el del triángulo equilátero con 60 grados

$$180 - \frac{360}{n} < 180 = 60 + 60 + 60 \leq \sum_{i=1}^{r} \left(180 - \frac{360}{n_i}\right), \text{ si } r \geq 3$$

con lo que la suma no puede ser de tres o más ángulos de polígonos, es decir, debe escribirse como suma de uno o dos ángulos.
• Caso $r = 1$. Si la suma consta de un único término entonces

$$180 - \frac{360}{n} = 180 - \frac{360}{m}$$

de donde $n = m$ y tenemos un polígono P' de n lados que comparte vértice y ángulo con P, es decir, es un reescalamiento de P. El reescalamiento debe ser por un factor menor a 1 ya que si es 1 el recubrimiento se estaría haciendo con un único polígono (el mismo P) lo que contradice la hipótesis de que el recubrimiento es con dos o más polígonos.
Ahora consideramos un vértice v' de P' consecutivo a v. El ángulo de v' exterior a P' interior a P será $\frac{360}{n}$ y al igual que antes deberá escribirse como suma de ángulos de otros polígonos



$$\frac{360}{n} = \sum_{i=1}^{r'} \left(180 - \frac{360}{n_i}\right)$$

Sin embargo, si $n \geq 7$ se tiene que

$$\frac{360}{n} < 60 \leq \sum_{i=1}^{r'} \left(180 - \frac{360}{n_i}\right).$$

Si $n = 5$ el ángulo a formar es 72 grados, sin embargo, 72 no se puede escribir como la suma de dos ángulos de polígonos ya que el único ángulo de un polígono regular más pequeño a 72 es el del triángulo equilátero con 60 grados pero con uno no es suficiente y con dos se pasa $60 + 60 = 120 > 72$.

• Caso $r = 2$. Si la suma consta de dos términos entonces uno de ellos debe ser el ángulo de un triángulo equilátero ya que en caso contrario la suma estaría formada por dos ángulos que como mínimo son de 90 grados (cuadrados) con lo cual

$$180 - \frac{360}{n} < 180 = 90 + 90 \leq 180 - \frac{360}{n_1} + 180 - \frac{360}{n_2}$$

y no se puede dar la igualdad.

Es decir, podemos tomar $n_2 = 3$ y obtenemos

$$120 - \frac{360}{n} = 180 - \frac{360}{n_2} \Rightarrow 360\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n}\right) = 60 \Rightarrow 6(n - n_1) = nn_1$$

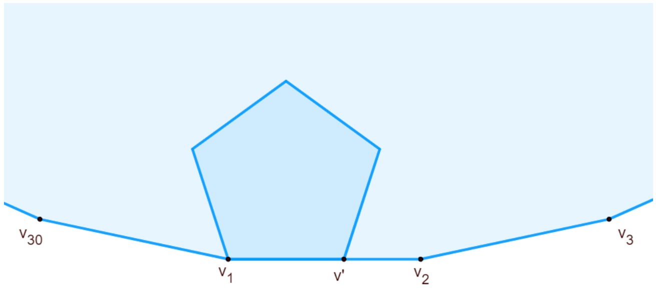
Si $n_1 \geq 6$ entonces $nn_1 \geq 6n > 6(n - n_1)$ y la igualdad no se puede dar. Solo quedan ver los casos en los que $n_1 = 3, n_1 = 4$ o $n_1 = 5$.

Si $n_1 = 3$ entonces $n = 6$ y ya vimos que sí era posible.

Si $n_1 = 4$ entonces $n = 12$ y también vimos que era posible.

Si $n_1 = 5$ entonces $n = 30$. Veamos que en este caso no es posible encontrar tal construcción.

Para cada vértice v_i del polígono de 30 lados el ángulo de vértice v_i debe estar formados por la suma de dos ángulos; uno de un triángulo regular y otro de un pentágono regular. Claramente el pentágono deberá ser adyacente a uno de los lados del polígono y, además, el lado del pentágono deberá coincidir con el lado del polígono de 30 lados ya que en caso contrario podríamos considerar v' del mismo modo que hacíamos anteriormente para obtener un ángulo de 72 grados y llegar a la misma contradicción.



Es decir, cada vértice v_i está en algún pentágono regular que además tiene otro de sus vértices o bien en v_{i+1} o bien v_{i-1}. Por tanto, si el lado l_i de vértices v_i, v_{i+1} es lado de un pentágono regular, entonces el vértice v_{i+2} está en algún pentágono regular cuyo lado no podrá ser l_{i+1} ya que en ese caso el ángulo de vértice v_{i+1} sería suma de dos ángulos de pentágonos regulares, la única posibilidad es que el lado del pentágono regular sea l_{i+2}. Estos dos pentágonos compartirán un vértice v'' que poseerá un ángulo de 84 grados, y del mismo modo que antes se razona que no se puede expresar como suma de ángulos de polígonos regulares.