LIII Olimpiada Matemática Española
Concurso Final Nacional
PRIMERA SESIÓN
Alcalá de Henares, viernes 24 de marzo de 2017

Problema 1

Determina el número de valores distintos de la expresión

$$\frac{n^2-2}{n^2-n+2},$$

donde $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

Problema 2

Un trazador de puntos medios es un instrumento que dibuja el punto medio exacto de dos puntos previamente señalados. Partiendo de dos puntos a distancia 1 y utilizando sólo el trazador de puntos medios, debes obtener dos puntos a una distancia estrictamente comprendida entre $\frac{1}{2017}$ y $\frac{1}{2016}$, trazando el menor número posible de puntos. ¿Cuál es el mínimo número de veces que necesitas utilizar el trazador de puntos medios, y qué estrategia seguirías para lograr tu objetivo?

Problema 3

Sea p un primo impar y $S_q = \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6\cdot7} + \cdots + \frac{1}{q(q+1)(q+2)}$, donde $q = \frac{3p-5}{2}$. Escribimos $\frac{1}{p} - 2S_q$ en la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros. Demuestra que $m \equiv n \ (m\acute{o}d\ p)$; es decir, m y n dan el mismo resto al ser divididos por p.

No está permitido el uso de calculadoras,
ni dispositivos electrónicos o digitales de ningún tipo.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de TRES HORAS Y MEDIA.

LIII Olimpiada Matemática Española
Concurso Final Nacional
SEGUNDA SESIÓN
Alcalá de Henares, sábado 25 de marzo de 2017

Problema 4

Se dispone de una fila de 2018 casillas, numeradas consecutivamente de 0 a 2017. Inicialmente, hay una ficha colocada en la casilla 0. Dos jugadores A y B juegan alternativamente, empezando A, de la siguiente manera: En su turno, cada jugador puede, o bien hacer avanzar la ficha 53 casillas, o bien hacer retroceder la ficha 2 casillas, sin que en ningún caso se sobrepasen las casillas 0 ó 2017. Gana el jugador que coloque la ficha en la casilla 2017. ¿Cuál de ellos dispone de una estrategia ganadora, y cómo tendría que jugar para asegurarse ganar?

Problema 5

Determina el máximo valor posible de la expresión

$$27abc + a\sqrt{a^2+2bc} + b\sqrt{b^2+2ca} + c\sqrt{c^2+2ab},$$

siendo $a, b, c,$ números reales positivos tales que $a+b+c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Problema 6

En el triángulo $ABC,$ los puntos medios respectivos de los lados BC, AB y AC son D, E y $F.$ Sean: M el punto donde la bisectriz interior del ángulo $\angle ADB$ corta al lado $AB,$ y N el punto donde la bisectriz interior del ángulo $\angle ADC$ corta al lado $AC.$ Sean además O el punto de intersección de las rectas AD y $MN,$ P el punto de intersección de AB y $FO,$ y R el punto de intersección de AC y $EO.$ Demuestra que $PR = AD.$

No está permitido el uso de calculadoras,
ni dispositivos electrónicos o digitales de ningún tipo.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de TRES HORAS Y MEDIA