LIII Olimpiada matemática Española (Concurso Final)

Enunciados y Soluciones

1. *Determina el número de valores distintos de la expresión*

$$\frac{n^2-2}{n^2-n+2},$$

donde $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$.

Solución. Sumando y restando $2-n$ al numerador se obtiene

$$a_n = \frac{n^2-2}{n^2-n+2} = \frac{n^2-2-n+2+n-2}{n^2-n+2} = 1 + \frac{n-4}{n^2-n+2}$$

Ahora vamos a ver si hay dos términos iguales, es decir, cuando es $a_p = a_q$ para $p \neq q$. Esto es equivalente a encontrar los enteros $p \neq q$ para los que

$$\frac{p-4}{p^2-p+2} = \frac{q-4}{q^2-q+2} \Leftrightarrow (p-q)(pq-4p-4q+2) = 0$$

$$pq-4p-4q+2+14 = 14 \Leftrightarrow (p-4)(q-4) = 14$$

De lo anterior se deduce que $(p-4) \mid 14$ y $p-4 \in \{\pm1, \pm2, \pm7, \pm14\}$. Los valores negativos no son posibles porque ambos $p, q \geq 1$ con lo que $p-4 \in \{1, 2, 7, 14\}$. Como $(p-4)(q-4) = 14$ entonces $q-4 \in \{14, 7, 2, 1\}$ de donde resultan los pares $(p, q) = (5, 18)$ y $(p, q) = (6, 11)$ para los que $a_5 = \frac{22}{23} = a_{18}$ y $a_6 = \frac{17}{16} = a_{11}$. Finalmente, dado que todos los a_n son números racionals, entonces entre los 100 primeros términos de la sucesión hay 98 que son distintos.

2. *Un trazador de puntos medios es un instrumento que dibuja el punto medio exacto de dos puntos previamente señalados. Partiendo de dos puntos a distancia* 1 *y utilizando sólo el trazador de puntos medios, debes obtener dos puntos a una distancia estrictamente comprendida entre* $\frac{1}{2017}$ *y* $\frac{1}{2016}$, *trazando el menor número posible de puntos. ¿Cuál es el mínimo número de veces que* *necesitas utilizar el trazador de puntos medios, y qué estrategia seguirías para lograr tu objetivo?*

Solución. Sin pérdida de generalidad podemos trabajar con la recta real y considerar que uno de los puntos iniciales es el 0 y el otro el 1. Es fácil comprobar que después de k aplicaciones del trazador, todos los puntos hallados son de la forma $\dfrac{n}{2^k}$ con $0 \leq n \leq 2^k$ siendo la fracción no necesariamente irreducible. Esto lo probaremos por inducción. En efecto, para $k = 1$ se tienen los puntos

$$0 = \frac{0}{2^1}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}, \quad 1 = \frac{2}{2^1}$$

Supongamos que en el paso k los puntos son

$$0 = \frac{0}{2^k}, \frac{1}{2^k}, \cdots, \frac{r}{2^k}, \cdots, \frac{s}{2^k}, \cdots, 1 = \frac{2^k}{2^k}$$

Entonces, aplicando el trazador de nuevo, en el paso $k+1$ los puntos obtenidos son

$$0 = \frac{0}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}, \cdots, \frac{1}{2}\left(\frac{r}{2^k} + \frac{s}{2^k}\right) = \frac{r+s}{2^{k+1}}, \cdots, 1 = \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}}$$

Ahora nos centramos en las distancias entre puntos. Utilizando el trazador una vez, la distancia entre dos cualesquiera de los puntos obtenidos

$$0 = \frac{0}{2^1}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}, \quad 1 = \frac{2}{2^1}$$

es un múltiplo de $\dfrac{1}{2^1}$ y aplicando el trazador k veces resulta que la distancia entre dos cualesquiera puntos es un múltiplo de $\dfrac{1}{2^k}$. Es inmediato comprobar que entre $\dfrac{64}{2^{17}}$ y $\dfrac{66}{2^{17}}$ se cumplen las desigualdades

$$\frac{64}{2^{17}} < \frac{1}{2017} < \frac{65}{2^{17}} < \frac{1}{2016} < \frac{66}{2^{17}}$$

Luego cualquier distancia estrictamente incluida entre $\frac{1}{2017}$ y $\frac{1}{2016}$ ha de tener necesariamente en el denominador un exponente $k \geq 17$.

Ahora vamos a ver que el número mínimo de veces que hay que utilizar el trazador de puntos medios es $k = 17$ y describiremos una estrategia para conseguirlo. En efecto, usando el trazador una vez se obtiene el punto $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$, luego lo utilizamos de nuevo entre este punto y 1 para obtener el punto $\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2}$, y a partir de aquí calculamos el punto medio entre el último punto hallado hasta ese momento, y el punto $\dfrac{1}{2}$, obteniendo sucesivamente los puntos

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{2^3}, \quad \frac{9}{16} = \frac{9}{2^4}, \quad \frac{17}{32} = \frac{17}{2^5}, \quad \frac{33}{64} = \frac{33}{2^6},$$

y tras un total de 7 aplicaciones del trazador, se obtiene el punto $\dfrac{65}{128} = \dfrac{65}{2^7}$. Aplicamos ahora 10 veces el trazador, para obtener el punto medio entre el último punto hallado hasta ese momento y el punto 0, obteniéndose sucesivamente los puntos

$$\frac{65}{2^8}, \frac{65}{2^9}, \frac{65}{2^{10}}, \ldots, \frac{65}{2^{17}}$$

Este último punto dista $\dfrac{65}{2^{17}}$ tanto de 0 como del anterior punto hallado $\dfrac{65}{2^{16}}$. Luego en 17 pasos hemos conseguido nuestro objetivo, y hemos terminado.

3. *Sean p un primo impar y* $S_q = \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{q(q+1)(q+2)}$, *donde* $q = \dfrac{3p-5}{2}$. *Escribimos* $\dfrac{1}{p} - 2S_q$ *en la forma* $\dfrac{m}{n}$, *donde m y n son enteros. Demuestra que* $m \equiv n \pmod p$*; es decir, que m y n dan el mismo resto al ser divididos por p.*

Solución. Se tiene que

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{3}{k+1}$$

con lo que

$$2\,S_q = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{q} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2}\right) - 3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{q+1}\right)$$

Antes de considerar el caso general veamos que ocurre con los primeros casos particulares. Para $p = 3$ es $q = 2$ y se cumple el enunciado trivialmente. En el caso en que $p = q = 5$, se tiene

$$2\,S_5 = \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2}{5\cdot 6\cdot 7} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) - 3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$$

y

$$\frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 + 2\,S_5 - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{2\cdot 5}{4\cdot 6} + \frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}$$

Como en los denominadores no aparece el primo 5 entonces $\frac{n-m}{n}$ es una fracción cuyo numerador es múltiplo de 5 mientras que su denominador no lo es, lo que permite concluir que $n-m$ es múltiplo de 5 o $n \equiv m \pmod 5$.

Notese que se han agrupado las $p-1=4$ fracciones en $\frac{p-1}{2}=2$ paréntesis cuyos denominadores suman $2p=10$.

Generalizando lo anterior, resulta

$$\frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 + 2\,S_q - \frac{1}{p}$$
$$= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{q} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2}\right) - 3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{q+1}\right) - \frac{1}{p}$$
$$= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{2}{3p-1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{2}{p-1}\right) - \frac{1}{p}$$
$$= \underbrace{\frac{2}{p+1} + \cdots + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{2}{3p-1}}_{p-1 \text{ sumandos}}$$
$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \frac{1}{\frac{3p-1}{2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right)}_{\frac{p-1}{2} \text{ paréntesis cuyos denominadores suman } 2p}$$
$$= \underbrace{\frac{2p}{(\frac{p+1}{2})(\frac{3p-1}{2})} + \cdots + \frac{2p}{(p-1)(p+1)}}_{\frac{p-1}{2} \text{ términos}}$$

Al igual que en el caso particular, todos los factores que aparecen en los denominadores son primos con p mientras que el numerador no lo es, lo que permite concluir que $n-m$ es múltiplo de p. Es dcecir, $n \equiv m \pmod p$.

4. *Se dispone de una fila de* 2018 *casillas, numeradas consecutivamente de* 0 *a* 2017*. Inicialmente, hay una ficha colocada en la casilla* 0*. Dos jugadores*

A y B juegan alternativamente, empezando A, de la siguiente manera: En su turno, cada jugador puede, o bien hacer avanzar la ficha 53 casillas, o bien hacer retroceder la ficha 2 casillas, sin que en ningún caso se sobrepasen las casillas 0 o 2017. Gana el jugador que coloque la ficha en la casilla 2017. ¿Cuál de ellos dispone de una estrategia ganadora, y cómo tendría que jugar para asegurarse ganar?

Solución. Vamos a probar que el jugador A tiene estrategia ganadora. Comienza de la única forma posible: llevando la ficha hasta la casilla 53. A partir de ahí, durante 38 turnos dobles BA, el jugador A hará lo contrario de B: si B avanza 53, A retrocede 2, y viceversa. De este modo, la ficha queda en la casilla $53 + 38 \times 51 = 1991$ y es turno de B. Los siguientes movimientos son forzados: 7 turnos dobles BA de restar. La ficha queda en la casilla $1991 - 14 \times 2 = 1963$ y es turno de B. Ahora:

1. Si B avanza 53, dejará la ficha en la casilla 2016 y tras 13 turnos dobles AB, forzados, la ficha queda en la casilla $2016 - 26 \times 2 = 1964$ y A gana sumando 53.

2. Si B resta 2, dejará la ficha en la casilla 1961. Entonces, A avanza 53 para dejarla en 2014. Tras 12 turnos dobles forzados BA, la ficha queda en $2014 - 24 \times 2 = 1966$. Después, B está obligado a restar 2 hasta 1964 y, en su turno, A gana sumando 53.

5. *Determina el máximo valor posible de la expresión*

$$27abc + a\sqrt{a^2+2bc} + b\sqrt{b^2+2ca} + c\sqrt{c^2+2ab},$$

siendo a, b, c, números reales positivos tales que $a+b+c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Solución. En primer lugar se observa que cuando $a = b = c = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ el valor que toma la expresión es $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, lo cual sugiere conjeturar que

$$27abc + a\sqrt{a^2+2bc} + b\sqrt{b^2+2ca} + c\sqrt{c^2+2ab} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Para probar la conjetura, se puede aplicar la desigualdad de Cauchy, $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leq ||\vec{u}||^2\,||\vec{v}||^2$ a los vectores $\vec{u} = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ y $\vec{v} = (\sqrt{bc}, \sqrt{ca}, \sqrt{ab})$, obteniéndose

$$9abc = \left(\sqrt{abc} + \sqrt{abc} + \sqrt{abc}\right)^2 \leq (a+b+c)\,(bc+ca+ab)$$

Multiplicando por 3 ambos miembros de la desigualdad anterior y teniendo en cuenta la restricción, resulta

$$27\,abc \leq 3\,(a+b+c)\,(bc+ca+ab) = \sqrt{3}\,(bc+ca+ab)$$

Por otro lado, dado que $a\sqrt{a^2+2bc} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2(a^2+2bc)}$, aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica a los números $3a^2$ y a^2+2bc se obtiene

$$a\sqrt{a^2+2bc} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2(a^2+2bc)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{3a^2+(a^2+2bc)}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(2a^2+bc)$$

Análogamnete, se tiene que

$$b\sqrt{b^2+2ca} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\,(2b^2+ca)$$

y

$$c\sqrt{c^2+2ab} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\,(2c^2+ab)$$

Combinando las desigualdades anteriores, y teniendo en cuenta otra vez la restricción, se obtiene

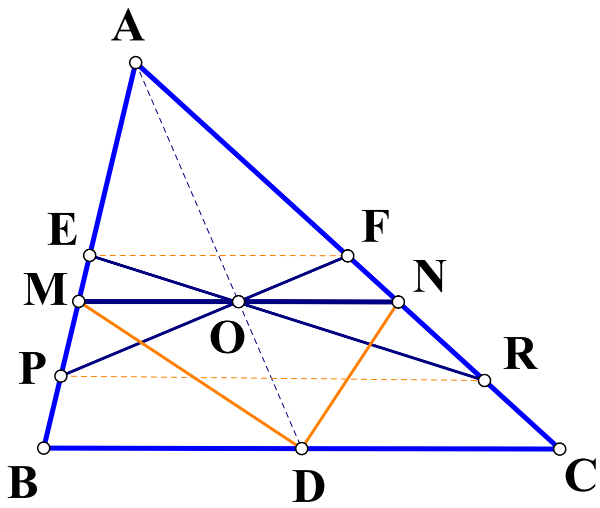
$$\begin{aligned}
&27abc + a\sqrt{a^2+2bc} + b\sqrt{b^2+2ca} + c\sqrt{c^2+2ab} \\
&\leq \sqrt{3}\,(bc+ca+ab) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,(2a^2+bc+2b^2+ca+2c^2+ab) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\,(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,(a+b+c)^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Esto prueba la conjetura y el máximo de la expresión es $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

6. *En el triángulo ABC los puntos medios respectivos de los lados BC, CA y AB son D, F, E. Sean: M el punto donde la bisectriz interior del ángulo $\angle ADB$ corta al lado AB, y N el punto donde la bisectriz interior del ángulo $\angle ADC$ corta al lado AC. Sean ademas O el punto de intersección de las rectas AD y MN, P el punto de intersección de AB y FO, y R el punto de intersección de AC y EO. Demuestra que $PR = AD$.*

Solución. Aplicando el teorema la bisectriz a los triángulos ADB y ADC se obtiene

$$\frac{MB}{AM} = \frac{BD}{AD} \quad \text{y} \quad \frac{NC}{AN} = \frac{DC}{AD}$$



Como $BD = DC$, $\dfrac{MB}{AM} = \dfrac{NC}{AN}$ y entonces MN es paralelo a BC, de donde $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{BC}{MN}$. De aquí, junto con $\dfrac{MB}{AM} = \dfrac{BD}{AD}$, resulta

$$\frac{BD+AD}{AD} = 1 + \frac{BD}{AD} = 1 + \frac{MB}{AM} = \frac{MB+AM}{AM} = \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} \qquad (1)$$

Como EF es la paralela media de ABC, EF y BC son paralelas, $BD = EF$ y $BC = 2 \cdot EF$. Sustituyendo esto en (1) obtenemos

$$\frac{BD+AD}{AD} = \frac{BC}{MN} \Leftrightarrow \frac{BD+AD}{AD} = \frac{2 \cdot EF}{MN} \Leftrightarrow \frac{2}{MN} = \frac{BD+AD}{AD \cdot EF}$$

que lo podemos escribir como

$$\frac{2}{MN} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{EF} \qquad (2)$$

Como MN y EF son paralelas a BC, son paraleleas entre sí, y entonces

$$\frac{AE}{EM} = \frac{AF}{AN} \qquad (3)$$

Aplicando dos veces el Teorema de Menelao al triángulo AMN, una con la transversal ER y otra con la transversal PF, se obtiene

$$\frac{AR}{NR} = \frac{AE}{EM} \cdot \frac{MO}{ON} \quad \text{y} \quad \frac{AP}{MP} = \frac{AF}{FN} \cdot \frac{MO}{ON},$$

así que teniendo en cuenta (3) obtenemos $\dfrac{AP}{MP} = \dfrac{AR}{NR}$ lo cual es equivalente a que PR es paralelo a MN. Pero MN es paralelo a EF y el cuadrilátero $EPRF$ es un trapecio. Ya que MN es paralela a las bases por el punto de intersección de las diagonales, MN es la media armónica de las bases del trapecio, es decir

$$\frac{1}{PR} + \frac{1}{EF} = \frac{2}{MN} \quad \text{y por (2),} \quad \frac{1}{PR} = \frac{1}{AD}$$

de donde se concluye que $PR = AD$.