## Soluciones

**Problema 1.** *Sea $E$ una elipse y consideremos tres rectas paralelas $r_1, r_2$ y $r_3$, cada una de las cuales corta a $E$ en dos puntos distintos. Sean estos puntos $A_1, B_1, A_2, B_2$ y $A_3, B_3$, respectivamente. Probar que los puntos medios de los segmentos $A_1B_1, A_2B_2$ y $A_3B_3$ están alineados.*

**Solución 1.** *El resultado es inmediato en el caso de que la elipse sea una circunferencia. Esta tres rectas determinan tres cuerdas y sus puntos medios son los puntos de corte de las rectas con un diámetro perpendicular a todas ellas. En otro caso, pensando en la elipse como la intersección de un cono con un plano (el cono de Apolonio), la proyección sobre un plano perpendicular al eje del cono nos da una circunferencia y las rectas paralelas se proyectan en rectas paralelas.*

**Solución 2.** *Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la ecuación de nuestra elipse es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Entre todas las rectas de pendiente dada $m$ consideraremos dos particulares: en primer lugar la que pasa por el origen, $O$, $y = mx$. Por simetría, el origen será precisamente el punto medio de los dos puntos en que esta recta corta a la elipse; a continuación, consideramos una de las dos rectas tangentes a la elipse con esta pendiente $m$ en el punto que llamamos $P$. Si nuestras rectas $r_1, r_2$ y $r_3$ tienen pendiente $m$ y los puntos medios de los puntos de corte con la elipse van a estar alineados, estos puntos medios deben estar sobre la recta que pasa por $O$ y $P$.*
*Tomemos una recta con ecuación $y = mx + c$ y determinemos sus intersecciones con la elipse, $A$ y $B$, con coordenadas respectivas, $(x_A, y_A)$ y $(x_B, y_B)$. $x_A$ y $x_B$ serán las soluciones para la ecuación*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1,$$

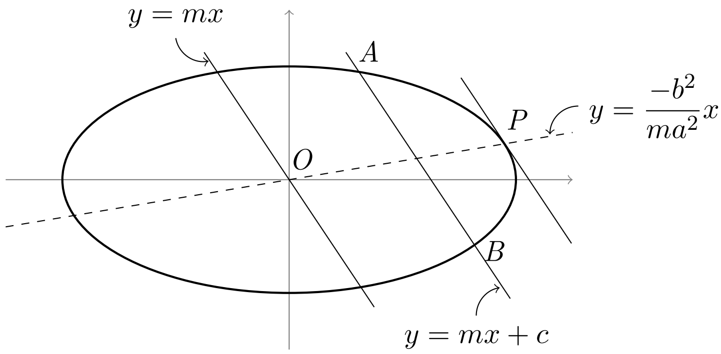
*es decir,*

$$(b^2 + m^2a^2)x^2 + (2ma^2c)x + a^2c^2 - a^2b^2 = 0,$$

*que vienen dadas por*

$$\frac{-2ma^2c \pm \sqrt{(2ma^2c)^2 - 4(b^2+m^2a^2)(a^2c^2-a^2b^2)}}{2(b^2+m^2a^2)},$$

*una para cada signo. Por lo tanto, si el punto medio tiene por coordenadas $(x_M, y_M)$, entonces $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-ma^2c}{b^2+m^2a^2}$ e $y_M = mx_M + c = \frac{b^2c}{b^2+m^2a^2}$, que están sobre la recta $y = \frac{y_M}{x_M}x = \frac{-b^2}{ma^2}\,x$, que es independiente del valor de $c$ de la recta particular elegida.*



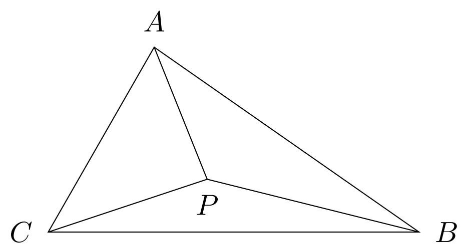
**Solución 3.** *Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la ecuación de nuestra elipse es* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *y que la pendiente común de* $r_1, r_2$ *y* $r_3$ *es* $m$. *La transformación,* $f$, *definida por*

$$(x', y') = f(x, y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$$

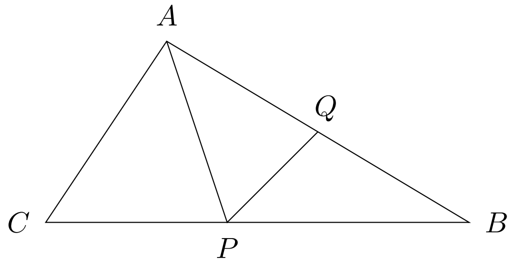
*convierte la elipse en una circunferencia de ecuación* $x'^2 + y'^2 = 1$, *y una recta de ecuación* $y = mx + c$ *en una recta de ecuación* $by' = max' + c$, *es decir,* $y' = \dfrac{ma}{b}x + \dfrac{c}{b}$. *Por tanto, las imágenes por* $f$ *de* $r_1, r_2$ *y* $r_3$ *serán tres rectas que cortan a la circunferencia formando tres cuerdas paralelas entre sí, y sus puntos medios estarán entonces sobre el diámetro ortogonal a todas ellas, es decir, sobre la recta de ecuación* $y' = -\dfrac{b}{ma}x'$. *Como* $f$ *conserva los puntos medios, por linealidad, los puntos medios de* $A_1B1$, $A_2B_2$ *y* $A_3B_3$ *estarán sobre la recta* $\dfrac{y}{b} = -\dfrac{b}{ma}\dfrac{x}{a}$, *es decir,* $y = -\dfrac{b^2}{ma^2}x$, *el diámetro conjugado de* $y = mx$.

**Problema 2.** *Sea* $T$ *un triángulo de ángulos* $\alpha, \beta$ *y* $\gamma$. *¿Para qué valores de* $\alpha, \beta$ *y* $\gamma$ *el triángulo* $T$ *se puede dividir en tres triángulos congruentes entre sí?*

**Solución.** *Si* $\alpha = \beta = \gamma$, *el triángulo es equilátero y siendo* $O$ *el centro de* $T$, *los triángulos que se obtienen uniendo* $O$ *con cualquiera par de vértices son congruentes. Veremos que sólo en este caso se puede obtener una división con tres triángulos congruentes, con un vértice común en el interior de* $T$.




*Denotemos por* $r, s$ *y* $t$ *los ángulos de estos tres triángulos congruentes y supongamos, por ejemplo, que* $r$ *es uno de los ángulos* $\angle APB$, $\angle BPC$ *o* $\angle CPA$. *Dado que cualquiera de estos ángulos es menor que* $\pi$, $r$ *sumado a cualquiera de ellos ha de ser mayor que* $\pi$, *por lo que no pueden ser ni* $s$ *ni* $t$, *pues* $r+s+t=\pi$, *luego los tres deben ser iguales a* $r$, *y* $T$ *es equilátero.*
*Analicemos ahora el caso en que los tres triángulos congruentes tengan un vértice común,* $P$ *sobre uno de los lados, por ejemplo el lado* $BC$, *y supongamos que los triángulos son* $\triangle CPA$, $\triangle APQ$ *y* $\triangle QPB$, *para algún punto* $Q$ *sobre el lado* $AB$.
*Nótese que ahora hay analogía entre los ángulos* $\angle QPA$ *y* $\angle BPQ$, *pero no entre estos y* $\angle APC$.




*Como antes, siendo $r, s$ y $t$ los ángulos de los tres triángulos congruentes, comenzamos analizando el caso en que $\angle QPA$ y $\angle BPQ$, digamos $r$*
*Por congruencia se tiene que $\overline{AQ} = \overline{QS}$, por lo que también $\overline{AP} = \overline{PB}$. Dado que $\triangle APB$ es isósceles y $Q$ es el punto medio de $AB$, $\angle PQA = \angle PQB = \pi/2$. Luego, los triángulos congruentes son rectángulos y los ángulos son $r = \pi/3$, $s = \pi/2$, $t = \angle ABC = \pi/6$.*
*Si los ángulos $\angle APQ$ y $\angle QPB$ no son el mismo, digamos que son $r$ y $s$, entonces $\angle APC = t$ y dado que también $r+s+\angle PAB+\angle PBA$, se tendrá $t = \angle PAB+\angle PBA$, por lo ninguno de ellos puede ser $t$. Entonces, $\angle PQA = \angle PQB = \pi/2$. Si además de no ser el mismo ángulo, fuese $r \neq s$, se tendría $\overline{AQ} \neq \overline{QB}$ por lo que, por la congruencia de $\triangle AQP$ y $\triangle QBP$, deberá tenerse $\overline{AQ} = \overline{PB}$. Pero dos triángulos rectángulos en que la hipotenusa de uno es igual a un cateto del otro, no pueden ser congruentes. Por lo tanto $r = s$, y estamos en el supuesto anterior.*
*Por tanto, sólo existen dos tipos de triángulos que se pueden descomponer en tres triángulos congruentes: los equiláteros y los rectángulos (30, 60, 90).*

**Problema 3.** *Se considera la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como sigue:*

$$f(n) = \begin{cases} -f(\frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ es par} \\ f(n-1)+1 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

*para $n \geq 0$. Demostrar que $f(n)$ es múltiplo de 3 si, y sólo si, $n$ es múltiplo de 3, y hallar el menor número $n$ que cumple $f(n) = 2017$.*

**Solución 1.** *De la definición de $f$ se sigue que $f(2^a) = (-1)^a$, para todo $a \geq 0$. Siendo $a > b \geq 0$, entonces*

$$f(2^a + 2^b) = f(2^b(2^{a-b}+1)) = (-1)^b[(-1)^{a-b}+1] = (-1)^a + (-1)^b,$$

*y, en general, si $a_1 > \cdots > a_k \geq 0$, se tiene que*

$$f(2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}) = (-1)^{a_1} + \cdots + (-1)^{a_k}.$$

*Los restos de $2^n$ al dividir entre 3 son 1 o 2, dependiendo de si $n$ es par o impar, y dado que 2 y $(-1)$ se diferencian en 3, se tiene que $2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}$ y $(-1)^{a_1} + \cdots + (-1)^{a_k}$ dan el mismo resto al dividir entre 3.*
*Para la segunda parte, claramente el menor número buscado se conseguirá sumando las menores potencias pares de 2 hasta completar 2017, es decir,*

$$2^0 + 2^2 + 2^{2\times 2} + \cdots + 2^{2\times 2016},$$

*progresión geométrica de razón 4 cuya suma es* $\dfrac{2^{2\times 2017}-1}{3}$

**Solución 2.** *Se prueba por inducción en el número de cifras binarias de $n$, que $f(n)$ es el número de unos que tiene la expresión binaria de $n$ en posiciones impares menos el número de unos que tiene en posiciones pares (considerando que contamos de derecha a izquierda y que empezamos por la posición uno). Si*

$$n = (a_k \dots a_2 a_1)_{(2)},$$

*entonces usando que $2^{2n+1} \equiv 2 \pmod 3$ y $2^{2n} \equiv 1 \pmod 3$, resultará que*

$$n \equiv a_k(-1)^k + \dots + a_2 - a_1,$$

*que es múltiplo de 3 si y solo si $f(n) = a_k(-1)^{k+1} + \dots - a_2 + a_1$ es múltiplo de 3. De la descripción de $f$ es obvio que el menor que cumple que $f(n) = 2017$ es*

$$4^0 + 4^1 + \dots + 4^{2016} = \frac{4^{2017}-1}{3}.$$

**Problema 4.** *Describir todas las soluciones enteras positivas $(m, n)$ de la ecuación $8m - 7 = n^2$ y dar el primer valor de $m$ (si existe) mayor que 1959.*

**Solución.** *Sea $m = k+1$, tenemos $8k+1 = n^2$, o equivalentemente, $8k = (n-1)(n+1)$. Evidentemente, $n$ es impar y si consideramos el entero $s = \frac{n-1}{2}$, deducimos que $k = \frac{1+s}{2}s$ es un número triangular. De hecho si $k$ es triangular (i.e. $m$ es el número posterior a un triangular) siempre hay solución y por ello las soluciones son $(m, n) = (1 + \frac{1+s}{2}s, \sqrt{1 + 4s(s+1)})$ usando que $s$ es entero no negativo. Asimismo, es fácil verificar que el primer entero triangular superior a 1959 es 2016.*

**Problema 5.** *Se colorean los números $1, 2, \dots, n$ de dos colores, azul y rojo. Probar que si $n = 2017$ existe una coloración tal que la ecuación*

$$8(x + y) = z$$

*no tiene soluciones monocromáticas. Determinar el menor $n$ para el que nunca es posible colorear los números de forma tal que no haya soluciones monocromáticas.*

**Solución.** *Para la segunda pregunta, observamos que si el 1 es azul, entonces $8(1+1) = 16$ es rojo, y por tanto $8(16 + 16) = 256$ azul y $8(256 + 1) = 2056$ es rojo. En general, si un número $i$ es azul $8(i + 1)$ es rojo, y por consiguiente $i - 15$ no puede ser rojo ya que en ese caso tendríamos $8((i - 15) + 16) = 8(i + 1)$. Por tanto, si $i$ es azul, $i - 15$ también. Ahora bien, 256 es azul y por tanto $256 - 15 \cdot 16 = 256 - 240 = 16$ es azul, lo cual es una contradicción. Por tanto, necesariamente ha de ocurrir que $n < 2056$. Si eso sucede es posible no tener soluciones monocromáticas: pintamos el $[1, 15]$ de azul, el $[16, 255]$ de rojo y el $[256, 2055]$ nuevamente de azul. Por tanto, no hay soluciones monocromáticas, ya que si $x, y$ fuesen ambos rojos, $8(x + y) \geq 8(16 + 16) = 256$ y ya no tenemos números rojos tan grandes. Si ambos fuesen azules y $\leq 15$ entonces $8(x + y)$ está entre 16 y 240, con lo que no hay problemas; por su parte, si uno es $\geq 256$, entonces $8(x + y) \geq 8 \cdot 257 = 2056$, número que ya no estamos considerando. En el caso 2017 basta considerar esta misma coloración pintando azul el $[256, 2017]$.*

**Problema 6.** *Calcular el número máximo de raíces reales distintas que puede tener un polinomio $P$ que verifique la siguiente propiedad: el producto de dos raíces distintas de $P$ sigue siendo una raíz de $P$.*

**Solución.** *La respuesta es 4. El polinomio $x(x-1/2)(x-1)(x-2)$, con raíces 0, 1/2, 1 y 2, cumple dicha cota. Supongamos que hubiese un polinomio con al menos 5 raíces distintas. Es importante reseñar que un polinomio tiene una cantidad finita de raíces y es lo que nos permite tomar máximos y mínimos.*
*Si un polinomio tiene 5 raíces, al menos 4 serían no nulas y distinguimos dos casos.*

1. *Si -1 es raíz, hay al menos una raíz (de hecho, al menos dos) con valor absoluto no nulo distinto de 1. Sea $A$ una raíz con el mayor valor absoluto entre todas la raíces y supongamos que $|A|>1$. Como $-1$ y $A$ son raíces, $-A$ es raíz; pero entonces también lo sería $-A\cdot A=-A^2$ y $\left|A^2\right|>|A|$, lo que contradiría la maximalidad del valor absoluto de $A$.*

   *Si no existen raíces con valor absoluto $>1$, tomemos como $A$ una de las raíces con el menor valor absoluto entre todas las raíces distintas de $0$. Se tendrá entonces que $|A|<1$, y como $-1$ y $A$ son raíces, $-A$ es raíz y también lo será $-A\cdot A=-A^2$. Pero entonces, $\left|A^2\right|<|A|$, lo que contradiría la minimalidad del valor absoluto de $A$ entre las raíces no nulas.*

2. *Si $-1$ no es raíz, hay al menos tres raíces no nulas y de módulo distinto de $1$. Hay entonces dos raíces $A,B$ con los dos valores absolutos mayores (mayores que $1$) o bien dos raíces con los dos valores absolutos menores $A,B$ (menores que $1$ y no nulos). En cualquier caso multiplicando $A\cdot B$ llegamos a una contradicción con la maximalidad o minimalidad.*

**Problema 7.** *Encontrar todas las soluciones enteras positivas de*

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b+c-2}=1$$

**Solución.** *Si $a,b,c\geq 2$, entonces la expresión es $\leq 1$, con igualdad si y solo si $a=b=c=2$. Así que suponemos ahora que uno de ellos es $1$, pongamos sin pérdida de generalidad $a=1$. Si $b,c\geq 3$ se llega a que la expresión es nuevamente menor que $1$, así que únicamente hay que analizar ahora los casos $b=1$ y $b=2$, que no dan más soluciones.*

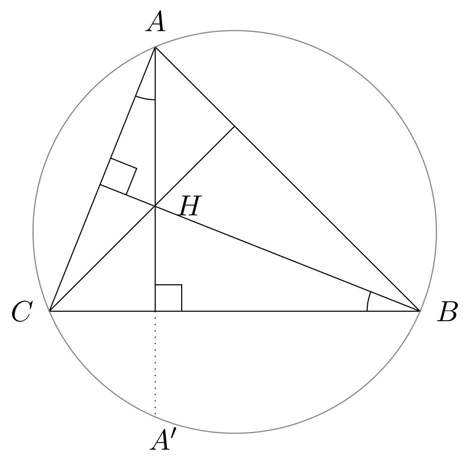
**Problema 8.** *Probar que hay infinitos números primos cuyo resto al dividirlos entre 3 es 2.*

**Solución.** *Evidentemente hay al menos un primo, pues 2 es un ejemplo. Supongamos que solo hubiese un número finito de ellos, $p_1,\dots,p_k$, y sea $n$ el producto de todos ellos. El producto de dos de esos primos deja resto 1 al dividir entre 3, por lo que, dependiendo de si $k$ es par o es impar, el resto de dividir $n$ entre $3$ será $1$ ó $2$, respectivamente.*
*Si $n$ deja resto $1$ al dividir entre $3$, entonces $n+1$, que no es divisible por ninguno de los primos $p_1,\dots,p_k$, deja resto $2$. Pero si $n$ no es divisible por ningún primo que deje resto $2$ al dividir entre $3$, como no es múltiplo de $3$, quiere decir $n$ es producto*

*de primos que dejan resto $1$ al dividir entre $3$, por lo que $n$ también deja resto $1$, en contradicción con que deja resto $2$.*
*Si $n$ deja resto $2$ al dividir entre $3$, razonamos con $n+3$ en vez de con $n+1$ y obtendremos de nuevo una contradicción, por lo que no es posible que haya sólo un número finito de primos con la condición pedida.*

**Problema 9.** *En un triángulo acutángulo $ABC$ consideramos su ortocentro, $H$. Sean $A', B'$ y $C'$ los simétricos de $H$ con respecto a los lados $BC, CA$ y $AB$, respectivamente. Probar que si los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ tienen un ángulo igual, entonces también tiene un lado igual. ¿Es cierto el recíproco?*

**Solución.** *Por perpendicularidad de sus lados, $\angle CAH = \angle HBC$. Por simetría con respecto a $CB$, $\angle CBA' = \angle HBC$, por lo que $A'$ está sobre la circunferencia circunscrita a $ABC$, y análogamente $B'$ y $C'$.*
*Por el teorema del seno, siendo $a$ el lado opuesto al ángulo $\alpha$ y $R$ el cincunradio, se tiene que $a = 2R \sin \alpha$. Como ambos triángulos comparten circuncírculo, si tiene dos ángulos de igual medida tendrán dos lados de igual medida.*




*El recíproco no es cierto, y el mismo teorema del seno nos sirve para demostrarlo. Basta tener en cuenta que $A'B'C'$ no es necesariamente acutángulo, de hecho sus ángulos miden, respectivamente $180 - 2\alpha, 180 - 2\beta$ y $180 - 2\gamma$, siendo $\alpha, \beta$ y $\gamma$ los ángulos de $ABC$, y tomar angulos cuya media sea 90. Por ejemplo, si $ABC$ tiene un ángulo de 80 y $A'B'C'$ tiene uno de 100, ya tendremos garantizado que ambos triángulos tienen sendos lados que mide lo mismo. Como $100 = 180 - 2\alpha$, se tendra que los ángulos de $ABC$ son 40,60 y 80, mientras que los de $A'B'C'$ serán 100, 60 y 20. No hay dos con el mismo valor.*

**Problema 10.** *Probar que dados $4n$ puntos en el espacio tridimensional, tales que no hay cuatro de ellos coplanarios, siempre se pueden formar $n$ pirámides de base triangular de modo que no hay intersecciones entre ellas.*

**Solución.** *Evidentemente por hipótesis no hay 3 puntos alineados, pues en ese caso añadiendo un cuarto punto cualquiera a la terna violaríamos la hipótesis sobre el carácter no coplanario.*

*Consideremos todas las posibles ternas de puntos y el plano que determina (unívocamente, al no haber 3 puntos alineados) cada terna. Hay una cantidad finita de estos planos y, por ello, es posible elegir una familia de planos paralelos que recubran el espacio que no sean paralelos a ninguno de este conjunto finito. Todo plano de dicha familia contiene, a lo sumo, dos puntos del conjunto de partida, por construcción. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que dicha familia de planos es, por ejemplo, la de planos horizontales.*
*A continuación vamos a elegir planos horizontales de dicha familia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que no contengan ningún punto del conjunto inicial y verifiquen la siguiente propiedad. Elegimos $A_1$ para que divida al espacio en dos zonas, superior e inferior, y que la superior tenga 4 puntos (o 5 en el peor caso, si resulta que el cuarto y el quinto están a la misma altura). Realizamos una pirámide con los cuatro puntos (si hubiese cinco, evitamos utilizar uno de los dos inferiores). Construimos un plano $A_2$ paralelo a $A_1$ de modo que por encima de $A_2$ haya sólo 4 o 5 puntos (excluyendo los que ya se han utilizado para construir la pirámide). Realizamos una pirámide con los cuatro puntos (si hubiese cinco, evitamos utilizar uno de los dos inferiores). ... Construimos un plano $A_{k+1}$ paralelo a $A_k$ de modo que por encima de $A_k$ haya sólo 4 o 5 puntos (excluyendo los que ya se han utilizado para construir pirámides). Realizamos una pirámide con los cuatro puntos (si hubiese cinco, evitamos utilizar uno de los dos inferiores). Tras construir el plano $A_{n-1}$ sólo quedarán 4 puntos libres (de los $4n$ iniciales) que unimos para formar la última pirámide. Por el método de construcción es claro que las pirámides no se cortan, pues los planos las separan en regiones disjuntas. El único problema podría ser que dos pirámides de regiones contiguas se cortasen en uno de esos planos que la separan, pero eso es imposible pues cada pirámide comparte a lo sumo uno de sus vértices con el plano (y evidentemente, por construcción, no hay dos pirámides que compartan vértice).*

**Problema 11.** *Hallar los valores enteros positivos de $m$ para los que existe una función $f$ del conjunto de los números enteros en sí mismo tal que $f^{(m)}(n) = n + 2017$, donde $f^{(m)}$ consiste en aplicar la función $f$ $m$ veces.*

**Solución.** *La primera observación es que $f$ debe ser biyectiva.*

**Lema 1.** *Si $f^{(a)}(n) = f^{(b)}(n)$, entonces tenemos $a = b$.*

*Proof.* Demostración: En otro caso, sin pérdida de generalidad asumamos $a > b$. Tenemos $f^{(a-b)}(n) = n$, lo que implica que $f^{(m(a-b))}(n) = n$, que es imposible, pues sería tanto como decir $n = n + 2017(a - b)$ . □

*Para cada $n$ fijo consideremos el conjunto $A_n = \{f^{(s)}(n) \mid s \text{ es entero }\}$. La primera observación es que si hay un cierto entero en dicho conjunto, entonces todos los enteros congruentes módulo 2017 con él están también en el conjunto, pues $x = f^{(t)}(n)$ implica $x + 2017k = f(t + km)(n)$ para cualquier valor entero de $k$. Además, en el conjunto están todos los representantes de exactamente $m$ clases distintas de resto módulo 2017. Es imposible que haya más, pues independientemente de $t$ sucede que $f^{(t)}(n)$ y $f^{(t+m)}(n)$ tienen igual resto módulo 2017, dejando a lo sumo $m$ posibilidades. Asimismo no puede haber menos, pues por el principio del palomar ello implicaría que existirían $c$,$d$ enteros entre $0$ y $m - 1$ con $f^{(c)}(n) - f^{(d)}(n) = 2017k$ implicando $f^{(c)}(n) - f^{(d+km)}(n) = 0$, lo cual contradice al Lema. Finalmente, basta notar que, por construcción, dos conjuntos*

*$A_i$ y $A_j$ son necesariamente iguales o disjuntos. Como entre $A_0, \ldots, A_2016$ se engloban todos los restos y cada uno aporta $m$, se deduce que $m$ debe dividir a 2017. Entonces sólo puede ser $m = 1$ o $m = 2017$ y, para acabar, basta poner un ejemplo para cada caso. Claramente, $f(n) = n + 1$ (caso $m = 2017$) y $f(n) = n + 2017$ (caso $m = 1$) cumplen la propiedad requerida.*

**Problema 12.** *Determinar todos los números naturales $n$ para los que existe algún número natural $m$ con las siguientes propiedades*

- *$m$ tiene al menos dos cifras (en base 10), todas son distintas y ninguna es 0.*
- *$m$ es múltiplo de $n$ y cualquier reordenación de sus cifras da lugar a un múltiplo de $n$.*

**Solución.** *Notemos que $n = 1, 3, 9$ funcionan porque en estos casos el criterio de divisibilidad es que la suma de las cifras sea múltiplo de $n$, y tomando $m = 18$ ya está. Para cualquier otro caso, consideramos que $m$ existe y que tiene como cifra más a la derecha $x$ y luego una $y$.*
*Entonces, permutando esas dos cifras, nos quedará que como se conserva la congruencia módulo $n$, $9(x - y)$ tiene que ser múltiplo de $n$. Eso quiere decir que $x$ es congruente con $y$ módulo $n/\operatorname{mcd}(9, n)$. Si $n$ no es múltiplo de 9, $x$ es congruente con $y$ y ha de ser $n \leq 8$. Para $n = 2, 4$ tomamos $m = 48$. Si $n = 8$, todas sus cifras tienen que ser pares pero eso es incompatible con $x - y$ múltiplo de 8 y $1 \leq x, y \leq 9$.*
*Supongamos ahora que $n$ es múltiplo de 3 pero no de 9. Si $n = 6$, todas las cifras son también pares y eso deja como única opción $\{x, y\} = \{2, 8\}$. Pero 28 no es múltiplo de 6 con lo que tendría que haber más cifras, que solo se pueden tomar entre 4 y 6; pero ninguno de estos números es múltiplo de 6: $2+8+4, 2+8+4, 2+8+6, 2+8+4+6$. Por tanto $n$ tendría que ser impar y como $x$ es congruente con $y$ módulo $n/3$, tendría que pasar que $n \leq 24$, y las únicas opciones que no hemos visto todavía son $n = 15$ y $n = 21$. $n = 15$ no puede ser pues todas las cifras serían múltiplo de 5. Si $n = 21$, $\{x, y\} = \{1, 8\}$ o $\{x, y\} = \{2, 9\}$, con lo que el número tiene una tercera cifra $z$ y repitiendo el análisis sucede que que como 90 no es múltiplo de 7, $y - z$ es múltiplo de 7, con lo que $x$ sería igual a $z$.*
*Solo nos queda el caso múltiplo de 9, y en ese caso $x, y$ son congruentes módulo $n/9$; entonces sucede que $n \leq 81$ y $n$ es impar por lo dicho antes; tampoco puede ser múltiplo de 5 ni de 7; así pues, nos quedan los casos $n = 27, 81$. Si descartamos $n = 27$ habremos acabado. $x, y$ son congruentes módulo 3; en general, todas las cifras son congruentes módulo 3 así que solo podemos tener 3 cifras; para ser múltiplo de 9 tenemos que las tres cifras son múltiplo de 3 así que $m$ tendría que ser alguna reordenación de 369, pero simplemente observamos que 369 no es múltiplo de 27. Por tanto $n$ puede ser $1, 2, 3, 4, 9$.*