LIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 13 de enero de 2017

1. Sea E una elipse y consideremos tres rectas paralelas r_1, r_2 y r_3, cada una de las cuales corta a E en dos puntos distintos. Sean estos puntos A_1, B_1, A_2, B_2 y A_3, B_3, respectivamente. Probar que los puntos medios de los segmentos A_1B_1, A_2B_2 yA_3B_3 están alineados.

2. Sea T un triángulo de ángulos α, β y γ. ¿Para qué valores de α, β y γ el triángulo T se puede dividir en tres triángulos congruentes entre sí?

3. Se considera la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como sigue:

$$f(n) = \begin{cases} -f\left(\dfrac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ f(n-1)+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

para $n \geq 0$. Demostrar que $f(n)$ es múltiplo de 3 si, y sólo si, n es múltiplo de 3, y hallar el menor número n que cumple $f(n) = 2017$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

<u>Viernes tarde, 13 de enero de 2017</u>

4. Describir todas las soluciones enteras positivas (m, n) de la ecuación

$$8m - 7 = n^2$$

y dar el primer valor de m (si existe) mayor que 1959.

5. Se colorean los números $1, 2, \ldots, n$ de dos colores, azul y rojo. Probar que si $n = 2017$ existe una coloración tal que la ecuación

$$8(x + y) = z$$

no tiene soluciones monocromáticas. Determinar el menor n para el que nunca es posible colorear los números de forma tal que no haya soluciones monocromáticas.

6. Calcular el número máximo de raíces reales distintas que puede tener un polinomio P que verifique la siguiente propiedad: el producto de dos raíces distintas de P sigue siendo una raíz de P.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.