LIV Olimpiada Matemática Española
Concurso Final Nacional
PRIMERA SESIÓN
Jaén, viernes 16 de marzo de 2018

Problema 1

Determina todos los enteros positivos x, tales que $2x+1$ sea un cuadrado perfecto, pero entre los números $2x+2, 2x+3, \dots, 3x+2$, no haya ningún cuadrado perfecto.

Problema 2

Se colocan $2n+1$ fichas, blancas y negras, en una fila $(n \geq 1)$. Se dice que una ficha está *equilibrada* si el número de fichas blancas a su izquierda, más el número de fichas negras a su derecha es n. Determina, razonadamente, si el número de fichas que están equilibradas es par o impar.

Problema 3

Sea O el circuncentro del triángulo acutángulo ABC y sea M un punto arbitrario del lado AB. La circunferencia circunscrita del triángulo AMO interseca por segunda vez a la recta AC en el punto K y la circunferencia circunscrita del triángulo BOM interseca por segunda vez a la recta BC en el punto N.
Prueba que $\acute{A}rea\,(MNK) \geq \frac{1}{4}\acute{A}rea\,(ABC)$ y determina el caso en que se alcanza la igualdad.

No está permitido el uso de calculadoras,
ni dispositivos electrónicos o digitales de ningún tipo.
Cada problema se puntúa de cero a siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de TRES HORAS Y MEDIA.

LIV Olimpiada Matemática Española
Concurso Final Nacional
SEGUNDA SESIÓN
Jaén, sábado 17 de marzo de 2018

Problema 4

Los puntos de una superficie esférica de radio 4, se pintan con cuatro colores distintos. Prueba que existen dos puntos sobre la superficie que tienen el mismo color y que están a distancia $4\sqrt{3}$ o bien a distancia $2\sqrt{6}$.

NOTA: *La distancia entre dos puntos es la distancia euclídea; es decir la longitud del segmento rectilíneo que los une.*

Problema 5

Sean a y b dos números positivos primos entre sí. Se dice que un entero positivo n es *débil* si no puede ser escrito en la forma $n = ax + by$, para algunos enteros x e y no negativos. Prueba que si n es *débil* y $n < \frac{ab}{6}$, existe un entero $k \geq 2$, tal que kn es *débil*.

Problema 6

Sea R^+el conjunto de los números reales positivos. Halla todas las funciones $f: R^+ \to R^+$, tales que $f\left(x + f(y)\right) = yf(xy + 1)$, para todo $x, y > 0$.

No está permitido el uso de calculadoras,
ni dispositivos electrónicos o digitales de ningún tipo.
Cada problema se puntúa de cero a siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de TRES HORAS Y MEDIA