Soluciones

Viernes mañana

Problema 1. Sean $a \geq 1$, $b \geq 1$ números naturales cuyo máximo común divisor y mínimo común múltiplo designamos por D y M, respectivamente.

Solución.

Si a' y b' son los respectivos cocientes obtenidos al dividir a y b entre D, se tiene:

$$a = Da', \quad b = Db', \quad a' \geq 1, \quad b' \geq 1, \quad \text{m.c.d. } \left(a', b'\right) = 1, \quad M = \frac{ab}{D} = Da'b'.$$

Por consiguiente, la desigualdad propuesta en el enunciado se puede escribir como

$$\left(Da'b'\right)^2 + D^2 \geq \left(Da'\right)^2 + \left(Db'\right)^2,$$

o, equivalentemente,

$$a'^2 b'^2 + 1 \geq a'^2 + b'^2,$$

equivalente, a su vez, a la desigualdad

$$\left(a'^2 - 1\right)\left(b'^2 - 1\right) \geq 0,$$

que es obviamente cierta habida cuenta de que $a' \geq 1$ y $b' \geq 1$ son números naturales, con lo que concluimos.

Se verifica la igualdad solo cuando $a|b$ o $b|a$.

Problema 2. ¿De cuántas maneras se puede escribir 111 como suma de tres números enteros en progresión geométrica?

Solución.

Sean a, ar, ar^2 números enteros que satisfacen la ecuación

$$a + ar + ar^2 = 111, \tag{1}$$

siendo r un número racional.

Habida cuenta de que $1 + r + r^2 = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, existen números *naturales* p y q, primos entre sí, tales que

$$1 + r + r^2 = \frac{p}{q} \tag{2}$$

y (1) puede escribirse en la forma $a = \frac{111q}{p}$, de donde se sigue que p ha de ser un divisor de 111; a saber, $p \in \{1, 3, 37, 111\}$.

Escribimos ahora (2) como una cuadrática en r,

$$qr^2 + qr + (q - p) = 0, \tag{3}$$

e imponemos que su discriminante, $q\,(4p-3q)$, sea igual o mayor que cero. Al ser positivo el factor de la izquierda (pues q es un número natural), deberá cumplirse que

$$4p-3q \geq 0. \tag{4}$$

Tenemos, pues:

Caso $p=1$. El único valor admisible para q es 1. Al sustituir p y q por 1 en (3), esta ecuación se escribe $r\,(r+1)=0$, obteniéndose $r=-1$ y $r=0$.

Caso $p=3$. Al ser $q \leq 4$ (por (4)) y m.c.d.$(p,q)=1$ (porque la fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible por hipótesis), los valores admisibles para q son $q=1$, $q=2$ y $q=4$.

Si $q=1$, la ecuación (3) se escribe $r^2+r-2=0$ y obtenemos $r=-2$ y $r=1$.

Si $q=2$, la correspondiente cuadrática es $2r^2+2r-1=0$ que no tiene raíces racionales.

Si $p=4$ se tiene $4r^2+4r+1=0$ y $r=-\frac{1}{2}$.

Los casos $p=37$ y $p=111$ pueden discutirse con un razonamiento análogo al anterior.

La tabla siguiente muestra las ternas (p,q,r) válidas:

p	q	r
1	1	-1, 0
3	1	-2, 1
3	4	$-1/2$
37	9	$4/3,\ -7/3$
37	16	$3/4,\ -7/4$
37	49	$-4/7,\ -3/7$
111	1	-11, 10
111	100	$-11/10,\ 1/10$
111	121	$-10/11,\ -1/11$

correspondiendo a las cuales se obtienen las diecisiete soluciones que resuelven el problema:

$r=0$	$111+0+0$
$r=1$	$37+37+37$
$r=-1$	$111-111+111$
$r=-2$	$37-74+148$
$r=-1/2$	$148-74+37$
$r=-3/4$	$48+36+27$
$r=4/3$	$27+36+48$
$r=-7/3$	$27-63+147$
$r=-3/7$	$147-63+27$
$r=-7/4$	$48-84+147$
$r=-4/7$	$147-84+48$
$r=1/10$	$100+10+1$
$r=10$	$1+10+100$
$r=-11$	$1-11+121$
$r=-1/11$	$121-11+1$
$r=-10/11$	$121-110+100$
$r=-11/10$	$100-110+121$

Problema 3. Encontrar las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f\,(x+f\,(x+y)) = f\,(2x)+y\ ,$$

cualesquiera sean x, y reales.

Solución.

Haciendo las sustituciones $x = f(0)$ y $y = -f(0)$ obtenemos $f(f(0) + f(0)) = f(2 \cdot f(0)) + f(0)$, de donde $f(0) = 0$. Sustituyendo ahora $x = 0$ en la ecuación dada, dejando la variable y arbitraria, se tiene $f(0 + f(y)) = f(0) + y$, esto es,

$$f(f(y)) = y. \tag{5}$$

Al sustituir $y = 0$ en la ecuación del enunciado será $f(x + f(x)) = f(2x)$, de donde se sigue que $f(f(x + f(x))) = f(f(2x))$ y, por (1), $x + f(x) = 2x$, es decir,

$$f(x) = x$$

Es inmediato comprobar que esta función es solución cualesquiera sean los valores de x, y, con lo que concluimos.

Viernes tarde

Problema 4 o 1 Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \qquad x^4 - 1.$$

Solución.

Justificaremos que para todo número real $x > 1$ existe un tal triángulo probando que el lado mayor es menor que la suma de los otros dos. En efecto, para cualquier real $x > 1$, tenemos:

(i) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > 0, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1 > 0, \qquad x^4 - 1 > 0.$

(ii) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > 2x^3 + x^2 + 2x + 1$, ya que

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 - \left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right) = x^4 - x^3 + x^2 - x = x(x-1)\left(x^2+1\right) > 0.$$

(iii) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > x^4 - 1.$

(iv) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 < \left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right) + \left(x^4 - 1\right)$, puesto que

$$\begin{array}{rcl} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 - \left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right) - \left(x^4 - 1\right) & = & -x^3 + x^2 - x + 1 \\ & = & -(x-1)\left(x^2+1\right) \\ & < & 0 \end{array}$$

y concluimos.

Problema 5 o 2 Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4. Solución.

Los restos potenciales de 7 respecto del módulo 10 coinciden con la última cifra, o cifra de las unidades, de las potencias de 7 y siendo

$$\begin{array}{rcll} 7^0 & \equiv & 1 & (\text{mód. } 10) \\ 7^1 & \equiv & 7 & (\text{mód. } 10) \\ 7^2 & \equiv & 9 & (\text{mód. } 10) \\ 7^3 & \equiv & 3 & (\text{mód. } 10) \\ 7^4 & \equiv & 1 & (\text{mód. } 10), \end{array}$$

resulta que 7^n acaba en 3 solo cuando $n = 4q + 3$, q un número natural: en efecto, al ser n de la forma $n = 4q + r$, q y r naturales, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, tenemos

$$\begin{array}{rcccl} 7^n & = & 7^{4q+r} & = & \left(7^4\right)^q \cdot 7^r \\ & & & \equiv & 1 \cdot 7^r \qquad (\text{mód. } 10) \\ & & & \equiv & 3 \qquad\quad\ (\text{mód. } 10) \quad \text{solo si } r = 3 \text{ pues } 0 \le r \le 3. \end{array}$$

Por consiguiente, si n acaba en 3, será $n = 4q + 3$ y

$$\begin{array}{rcccll} 7^n & = & 7^{4q+3} & = & \left(7^4\right)^q \cdot 7^3 & \\ & & & = & 2401^q \cdot 343 & \\ & & & = & (2400+1)^q \cdot 343 & \\ & & & = & \left(1\dot{0}0 + 1\right)^q \cdot 343 & \\ & & & = & \left(1\dot{0}0 + 1\right) \cdot 343 & (\dagger) \\ & & & = & 1\dot{0}0 + 343 & \\ & & & = & 1\dot{0}0 + (300 + 43) & \\ & & & = & 1\dot{0}0 + 43 & (\ddagger) \\ & & & = & \underline{a_1}\,\underline{a_2}\,\underline{a_3} \ldots \underline{a_n}00 + 43 & \\ & & & = & \underline{a_1}\,\underline{a_2}\,\underline{a_3} \ldots \underline{a_n}43, & \end{array}$$

con lo que la cifra de las decenas es 4, como se quería.

$$(\dagger)\ \left(1\dot{0}0 + 1\right)^q = \textstyle\sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} 100^{q-j} \cdot 1^j = \displaystyle\underbrace{\sum_{j=0}^{q-1} \binom{q}{j} 100^{q-j}}_{=1\dot{0}0} + \underbrace{\binom{q}{q} 100^0}_{=1} = 1\dot{0}0 + 1.$$

$$(\ddagger)\ 1\dot{0}0 + (300 + 43) = \underbrace{\left(1\dot{0}0 + 300\right)}_{=1\dot{0}0} + 43 = 1\dot{0}0 + 43.$$

Problema 6 o 3. Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

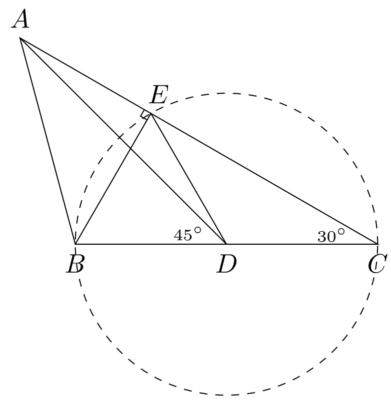
Solución 1.

En $\triangle ABC$, sea E el pie de la perpendicular trazada desde B. Entonces el triángulo EBC es rectángulo en E, el punto D es - por hipótesis - el punto medio de su hipotenusa BC y, por tanto, el circuncentro de dicho triángulo en cuya circunferencia circunscrita el ángulo BDE es el central correspondiente al inscrito $\angle BCE$. Por consiguiente,

$$\begin{array}{rcl} \angle BDE & = & 2 \cdot \angle BCE \\ & = & 2 \cdot \angle BCA \\ & = & 2 \times 30^\circ \\ & = & 60^\circ. \end{array}$$

Se sigue que $\triangle EBD$ es equilátero (pues es isósceles y tiene un ángulo de 60°) y, a su vez,

$$\begin{array}{rcl} \angle ADE & = & \angle BDE - \angle ADB \\ & = & 60^\circ - 45^\circ \\ & = & 15^\circ \\ & = & \angle DAE \quad \text{(por el teorema del ángulo exterior aplicado a } \triangle ADC \text{ en } D). \end{array}$$



Así, $\triangle EAD$ es isósceles con $AE = ED$. Mas $ED = EB$, pues $\triangle EBD$ es equilátero, según hemos visto.

Por tanto, $AE = EB$ y $\triangle AEB$ es rectángulo (en E) e isósceles. En consecuencia, $\angle BAE = 45°$ y

$$\angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = 45° - 15° = 30°.$$

Solución 2.

Por el teorema del ángulo exterior aplicado a ADC en D,

$$\begin{aligned} \angle CAD = \angle BDA - \angle DCA = 45° - 30° &= 15° \\ &= \tfrac{1}{2}\angle DCA \end{aligned}$$

y

$$\angle DCA = \angle 2 \cdot \angle CAD.$$

La igualdad anterior se puede escribir, de una manera equivalente[1] como

$$AD^2 = DC\,(DC + CA)\,,$$

esto es,

$$m_a^2 = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} + b\right)$$

y, por el teorema de la mediana aplicado a ABC, se obtiene

$$\frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} + b\right)$$

o, equivalentemente,

$$b^2 + c^2 - a^2 = ab \tag{6}$$

Consideremos en lo que sigue el triángulo ABC y sus elementos.

Sustituimos el primer miembro de (1) por su igual, $2bc\cos A$ (por el teorema del coseno). Simplificamos y obtenemos

$$2c\cos A = a,$$

[1] Si x, y, z son las longitudes de los lados de un triángulo XYZ respectivamente opuestos a X, Y, Z, entonces

$$\angle X = 2 \cdot \angle Y \Leftrightarrow x^2 = y\,(y + z)\,.$$

equivalente a

$$2\sin C\cos A = \sin A.$$

Dividiendo por $\cos A$ y habida cuenta de que $\angle C = 30°$, resulta

$$\tan A = 1,$$

y

$$\angle A = 45°.$$

Finalmente,

$$\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 45° - 15° = 30°.$$

Sábado mañana

Problema 4 Probar que:

1. La suma de las distancias desde un punto de la superficie de la esfera inscrita en un cubo de $\mathbb{R}^3$ a todas las caras del mismo no depende del punto elegido.

2. Misma cuestión anterior para la suma de los cuadrados de las distancias.

3. Misma cuestión que las anteriores para la suma de los cubos de las distancias.

Solución.

Designaremos por P el punto elegido sobre la esfera inscrita en el cubo y por r el radio de la misma.

1. Habida cuenta de que la arista del cubo es igual a $2r$, su volumen es $8r^3$, y, al ser P interior al cubo, también es igual a la suma de los volúmenes de las seis pirámides que tienen por bases las caras del hexaedro, vértice común en P y cuyas alturas son, precisamente, las distancias de P a las caras del cubo, esto es, $\frac{1}{3}(2r)^2\sigma$, por la sabida fórmula del volumen de una pirámide y donde σ designa la suma de las distancias de P a todas las caras del cubo.

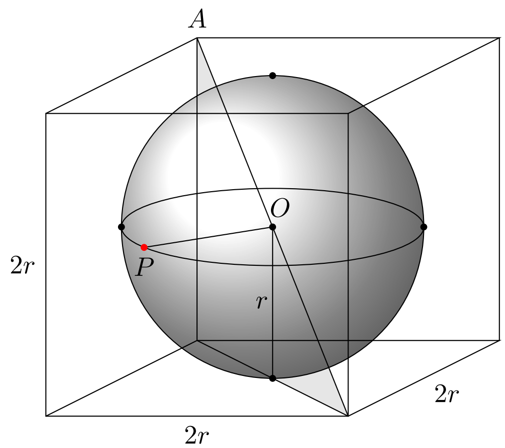
   Así, pues,
   $$8r^3 = \frac{1}{3}(2r)^2\sigma$$
   y
   $$\sigma = 6r,$$
   que no depende del punto P.

2. Sean x, y, z las respectivas distancias de P a tres de las caras del cubo que tengan un vértice, llamémosle A, común. Por el teorema de Pitágoras (aplicado dos veces),
   $$x^2 + y^2 + z^2 = PA^2. \tag{7}$$
   De manera análoga, al ser $2r - x$, $2r - y$, $2r - z$ las tres distancias restantes, si B es el vértice del cubo diagonalmente opuesto al A,
   $$(2r - x)^2 + (2r - y)^2 + (2r - z)^2 = PB^2. \tag{8}$$
   De (1) y (2) se sigue que la suma de los cuadrados de las distancias considerada es igual a $PA^2 + PB^2$.

Por el teorema de la mediana, aplicado al triángulo PAB,

$$PA^2 + PB^2 = 2 \cdot PO^2 + \frac{AB^2}{2} \tag{9}$$

en donde O designa el punto medio de la diagonal AB.



Nótese que O es, a su vez, el centro de la esfera inscrita en el cubo (véase la figura); por consiguiente,

$$PO = r$$

y, por (3), teniendo presente que la longitud de la diagonal de un cubo es igual a $\sqrt{3}$ veces la de la arista,

$$PA^2 + PB^2 = 2r^2 + \frac{12r^2}{2} = 8r^2,$$

que no depende del punto P.

3. Sean u, v las respectivas distancias de P a dos caras paralelas del cubo. Entonces,

$$u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv\,(u+v) = (2r)^3 - 3uv \cdot (2r) = 8r^3 - 6ruv. \tag{10}$$

y

$$2uv = (u+v)^2 - \left(u^2+v^2\right) = (2r)^2 - \left(u^2+v^2\right) = 4r^2 - \left(u^2+v^2\right). \tag{11}$$

Sustituimos en (4) el valor de uv deducido de (5) y obtenemos

$$u^3 + v^3 = 8r^3 - 3r\left(4r^2 - \left(u^2+v^2\right)\right) = 3r\left(u^2+v^2\right) - 4r^3. \tag{12}$$

Con (6) y sendas expresiones análogas para los dos pares de caras paralelas restantes se obtiene:

$$\begin{array}{ccl} \begin{array}{c}\text{suma}\\ \text{de los cubos}\\ \text{de las distancias}\end{array} & = & 3r \cdot \text{ (suma de los cuadrados de las distancias) } - 3 \cdot 4r^3 \\ & = & 3r \cdot 8r^2 - 12r^3 \\ & = & 12r^3, \end{array}$$

que no depende del punto P elegido, con lo que concluimos.

Problema 5. Sean a, b, c números naturales primos, distintos dos a dos. Demostrar que el número

$$(ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca)^{b-1} - 1$$

es un múltiplo del producto abc.

Solución.

Al ser a, b, c primos, el producto ab no es divisible por c (si $c|ab$, sería $c|a$ o $c|b$; habida cuenta de que $c > 1$, $a \neq c$, $b \neq c$, tendríamos una contradicción con el hecho de ser a y b primos).

Entonces, por la congruencia de Fermat (†),

$$(ab)^{c-1} \equiv 1 \pmod{c}$$

y

$$(ab)^{c-1} - 1 = \dot{c}.$$

Análogamente,

$$(bc)^{a-1} - 1 = \dot{a}, \qquad (ca)^{b-1} - 1 = \dot{b}.$$

Multiplicando miembro a miembro las igualdades anteriores, se obtiene

$$\begin{aligned} a^{b+c-2}b^{c+a-2}c^{a+b-2} &- a^{b+c-2}b^{c-1}c^{b-1} - a^{c-1}b^{c+a-2}c^{a-1} - a^{b-1}b^{a-1}c^{a+b-2} \\ &+ (ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca) - 1 \\ &= \dot{abc} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca) - 1 &= \dot{abc} - a^{b+c-2}b^{c+a-2}c^{a+b-2} + a^{b+c-2}b^{c-1}c^{b-1} \\ &\quad + a^{c-1}b^{c+a-2}c^{a-1} + a^{b-1}b^{a-1}c^{a+b-2}, \end{aligned} \tag{13}$$

cuyo segundo miembro es un múltiplo de abc por ser suma de múltiplos de abc: en efecto, todos los sumandos en el segundo miembro de (3) contienen el factor abc pues los exponentes que figuran son iguales o mayores que 1 al ser, por hipótesis, $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$. Por consiguiente, también el primer miembro de (3) es múltiplo de abc:

$$(ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca)^{b-1} - 1 = \dot{abc},$$

como se quería.

(†) Lema. Sean p y h números naturales, p primo, $1 \leq h \leq p-1$. Entonces $\binom{p}{h}$ es un múltiplo de p.

En efecto, por la teoría combinatoria, $\binom{p}{h} = \frac{p!}{h!(p-h)!}$ es un número natural . El exponente de p en la descomposición de $p!$ en producto de factores primos es 1: supongamos, para llegar a una contradicción, que $p! = p^2 m$, m un número natural. Dividiendo por p, $(p-1)! = pm$ y p sería un divisor de $(p-1)!$; por consiguiente, al ser p primo, p dividiría a alguno de los factores del producto $(p-1) \times (p-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, lo que constituye la contradicción buscada ya que cada uno de dichos factores es menor que p.

Por un razonamiento análogo, el exponente de p en la descomposición en factores primos de $h!$ y de $(p-h)!$ es 0. Así, pues, p figura con exponente 1 en la descomposición en factores primos del número natural $\frac{p!}{h!(p-h)!}$ y $\binom{p}{h}$ es un múltiplo de p.

Corolario 1. Si a es un número entero y p un número natural primo, entonces

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p} \tag{14}$$

Solo hay que observar que la suma en el segundo miembro de la identidad

$$(a+1)^p - (a^p+1) = \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}a$$

es un múltiplo de p por serlo cada uno de los sumandos $\binom{p}{h}a^{p-h}$.

Corolario 2. Si a es un número entero y p un número natural primo, entonces

$$a^p \equiv a \quad (\text{mód. } p)$$

Es suficiente una demostración para a un número natural. El corolario es trivialmente cierto para $a=0$ y para $a=1$. Supongamos

$$a^p \equiv a \quad (\text{mód. } p), \quad a \in \mathbb{N},$$

y probemos que

$$(a+1)^p \equiv a+1 \quad (\text{mód. } p) \tag{15}$$

A tal fin, restamos $a+1$ a los dos miembros de (1) y obtenemos la congruencia siguiente:

$$(a+1)^p - (a+1) \equiv a^p - a \quad (\text{mód. } p)$$

cuyo segundo miembro es múltiplo de p por hipótesis. En consecuencia, también el primer miembro será un múltiplo de p:

$$(a+1)^p - (a+1) = \dot{p}$$

o, equivalentemente,

$$(a+1)^p \equiv a+1 \quad (\text{mód. } p),$$

como se quería.

Proposición (Congruencia de Fermat). Si p es un número natural primo y a es un número entero no divisible por p,

$$a^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{mód. } p).$$

Demostración. Tenemos $p|a\left(a^{p-1}-1\right)$ (por el corolario 2) y m.c.d.$(a,p)=1$ (pues $p \nmid a$, por hipótesis). El teorema fundamental de la aritmética da inmediatamente

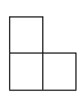
$$p|\left(a^{p-1}-1\right),$$

equivalente a

$$a^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{mód. } p),$$

con lo que concluimos.

Problema 6. Se han coloreado 46 cuadrados unitarios de una cuadrícula 9×9. ¿Hay, en la cuadrícula, alguna figura del tipo

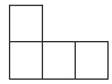


(no necesariamente con la orientación que muestra el dibujo) con las tres casillas coloreadas?

Solución.

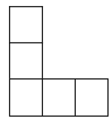
La respuesta es afirmativa. En efecto, probaremos que si coloreamos como indica el enunciado, se puede encontrar siempre una figura del tipo dado con las tres casillas coloreadas.

A tal fin, dividamos la cuadrícula 9×9 en dieciséis cuadrados 2×2, tres figuras como la siguiente:



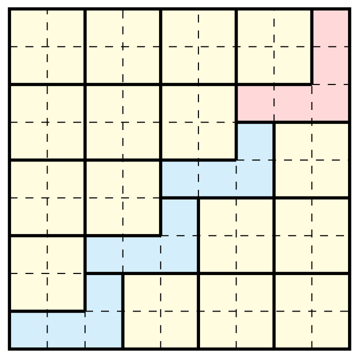
(16)

y una más como la que sigue:

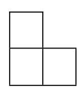


(17)

tal como se muestra en el esquema siguiente:



Si no hubiera ninguna figura del tipo



con las tres casillas coloreadas, entonces cada uno de los dieciséis cuadrados tendría, a lo más, 2 casillas coloreadas; cada una de las tres figuras (1) tendría, a lo más, 3 casillas coloreadas y la figura (2), 4 casillas coloreadas, como máximo.

Así, pues, se habrían coloreado, como máximo, $2\times16+3\times3+4 = 45$ casillas de la cuadrícula, lo que es contrario a la hipótesis.