

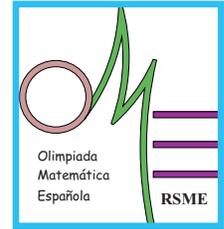


LIV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 19 de enero de 2018



1. Sean $a \geq 1$, $b \geq 1$ números naturales cuyo máximo común divisor y mínimo común múltiplo designamos por D y M , respectivamente.

Demostrar que

$$D^2 + M^2 \geq a^2 + b^2.$$

2. ¿De cuántas maneras se puede escribir 111 como suma de tres números enteros en progresión geométrica?

3. Encontrar las funciones reales f , de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y$$

cualesquiera sean x , y reales.

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

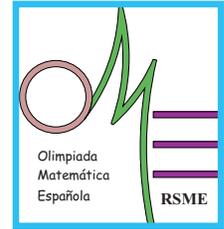


LIV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 19 de enero de 2018



4. Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \quad x^4 - 1$$

5. Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4.
6. Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**