OMA 2019 – Soluciones

Problema 1

Si $a \geq 2$ entonces

$$ad \geq 2d > b+c$$

Luego $a=1$ y queda:

$$\left.\begin{array}{l} d=b+c \\ bc=d+1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} d=b+c \\ bc=b+c+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} d=b+c \\ (b-1)(c-1)=2 \end{array}$$

De $(b-1)(c-1)=2$ se sigue $b=2$ y $c=3$, pues $b<c$, y queda $d=5$.

Luego $(1,2,3,5)$ es la unica solucion.

$\blacksquare$

OMA 2019 – Soluciones

Problema 2

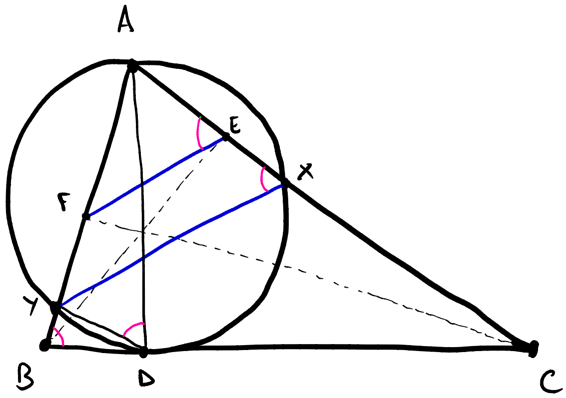
Si $n=2020$ es evidente que es posible escribiendo 1 en todas las casillas menos en las casillas de la ultima columna que escribimos -1, el producto en cada fila sea -1 y en cada columna 1 y se sigue lo que queremos.

Si $n=2019$ es imposible, sea F el número de filas con producto -1 y C el número de columnas con producto -1 entonces el número de -1 en el tablero modulo 2 será igual a $F = C$ modulo 2 luego $F+C=0 \pmod 2$ pero $F+C=2019=1 \pmod 2$. Contradicción.

$\blacksquare$

OMA 2019 – Soluciones

Problema 3



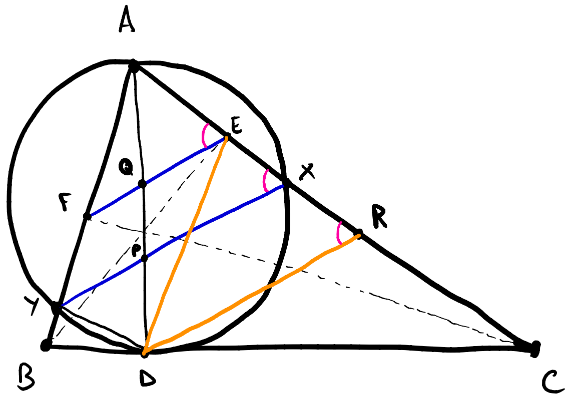
Es fácil ver que $EF \parallel XY$ pues:

$\sphericalangle AEF = \sphericalangle CEF = \sphericalangle CBF = \sphericalangle CBA$

$\sphericalangle AXY = \sphericalangle ADY = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle YAD = \pi/2 - \sphericalangle BAD =$

$= \pi/2 + \sphericalangle DBA - \pi/2 = \sphericalangle DBA = \sphericalangle CBA$

Sea $R \in AC$ tal que $\sphericalangle ARD = \sphericalangle CBA$ entonces el triangulo $\widehat{DER}$ es isósceles pues $\sphericalangle ERD = \sphericalangle ARD = \sphericalangle CBA$ y $\sphericalangle DER =$ $= \sphericalangle DEA = \sphericalangle DBA = \sphericalangle CBA$.



Es trivial que X es por tanto el punto medio de $\overline{ER}$ pues es el pie de la altura por D del triangulo $\widehat{DER}$ con $DE = DR$

Luego $EX = XR$. Como por construcción $DR \parallel QE \parallel PX$ podemos aplicar el teorema de Thales y se sigue $\frac{QP}{PD} = \frac{EX}{XR} = 1$ y entonces $QP = QD$.

■

OMA 2019 – Soluciones

Problema 4

Es sencillo ver que:

$$c_1 \cdots c_n = (n!)^2 \cdot (n+1)$$

Y $c_a - c_b = (a-b)(a+b+1)$ luego:

$$c_{m+i} - c_k = (m-k+i)(m+k+1+i)$$

Luego:

$$\prod_{i=1}^{n} (c_{m+i} - c_k) = \prod_{i=1}^{n} (m-k+i) \cdot \prod_{i=1}^{n} (m+k+1+i)$$

Luego $\dfrac{(c_{m+1}-c_k)\cdots(c_{m+n}-c_k)}{c_1 \cdots c_n} =$

$$= \binom{(m-k+n)}{n} \binom{m+k+1+n}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

Como $\binom{m-k+n}{n}$ y $\binom{m+k+1+n}{n}$ son enteros por tratarse de numeros combinatorios queda ver que $n+1$ divide a su producto.

Esto es trivial, sea $m+k+1=p$ primo con $p>n+1$ veamos que

$$n+1 \mid \binom{p+n}{n}$$

esto es ver que

$$n+1 \mid (p+1)\cdots(p+n)$$

trivial mirando lo de la derecha modulo $n+1$.

$\blacksquare$