LV Olimpiada matemática Española (Concurso Final)

Enunciados y Soluciones

1. Un conjunto de números enteros T es orensano si existen enteros $a < b < c$ tales que a y c pertenecen a T y b no pertenece a T. Hallar el número de subconjuntos T de $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ que son orensanos.

Solución. El número de subconjuntos de $\{1, 2, \cdots, 2019\}$ es 2^{2019} como es bien conocido. Contemos ahora el número de estos conjuntos que **NO** tienen la propiedad pedida. Claramente, el conjunto vacío, y los subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ con un único elemento no tienen la propiedad pedida, ya que es imposible elegir a, c distintos en ellos. Hay en total

$$\binom{2019}{0} + \binom{2019}{1} = 1 + 2019 = 2020$$

de estos conjuntos. Cualquier otro subconjunto que no tenga la propiedad pedida ha de estar formado por elementos consecutivos de $\{1, 2, \ldots, 2019\}$. En efecto, si m, M son respectivamente el mínimo y el máximo de T, para que T NO tenga la propiedad enunciada, todos los elementos $m, m+1, m+2, \ldots, M$ han de estar en T, pues si alguno k no lo estuviera, podemos tomar $a = m$, $b = k$ y $c = M$, cumpliéndose la propiedad. El número de tales subconjuntos es $\binom{2019}{2}$. En efecto, dado un tal subconjunto, su mínimo m y su máximo M lo determinan biunívocamente, y hay $\binom{2019}{2}$ formas distintas de elegir dos números del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2019\}$, de forma que el menor será m, y el mayor M.

Finalmente, se tiene que el número total de subconjuntos T de $\{1, 2, \cdots, 2019\}$ con la propiedad pedida es

$$2^{2019} - 2020 - \binom{2019}{2} = 2^{2019} - 2039191.$$

2. Determinar si existe un conjunto finito S formado por números primos positivos de manera que para cada entero $n \geq 2$, el número $2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ sea múltiplo de algún elemento de S.

Solución. Es bien conocido que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6},$$

con lo que restando 1 a ambos lados, resulta

$$2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6}{6} = \frac{(n-1)\left(2n^2 + 5n + 6\right)}{6}.$$

Esta expresión sugiere tomar $p = (n-1)/6$ o $n = 6p + 1$ con lo que se obtiene

$$2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = p\left(72p^2 + 54p + 13\right).$$

Ahora elegimos $n = 6p + 1$, donde p da resto 1 al dividir entre cualquier primo de S distinto de 139, y da resto -1 al dividir entre 139. Nótese que el resto al dividir entre cualquier primo de S distinto de 139 es $72 + 54 + 13 = 139$, que es primo y por lo tanto no divisible por ningún primo de S distinto de 139, y el resto al dividir entre 139 es $-72 + 54 - 13 = -31$, claramente tampoco divisible por 139. Luego esta expresión es coprima con todos los primos de S, y la respuesta es que **no existe** tal conjunto S.

3. Los números reales a, b y c verifican que el polinomio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + c$ tiene exactamente tres raíces reales distintas; estas ríces son iguales a $\tan(y)$, $\tan(2y)$ y $\tan(3y)$, para algún número real y. Hallar todos los posibles valores de y, $0 \leq y < \pi$.

Solución. Sean r, r, s, t los tres ceros reales y distintos del polynomio $p(x)$. Mediante las fórmula de Cardano-Viète, identificando los coeficientes cúbico y lineal, se obtiene

$$2r + s + t = r^2 s + r^2 t + 2rst \Leftrightarrow 2r(1 - st) = (r^2 - 1)(s + t)$$

De la última igualdad se deduce que si $r^2 - 1 = 0$ entonces $1 - st = 0$ y viceversa. A continuación, bajo la hipóteis $r^2 = st = 1$ y considerando $0 \leq y < \pi$, analizaremos los siguientes casos:

- Si $r = \tan y$ entonces $y \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ pero para estos valores $s = \tan 2y$ no está definido.
- Si $r = \tan 2y$ entonces $y \in \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}$. Poniendo $s = \tan y$ y $s = \tan 3y$ se tiene que para todos los valores anteriores es $rs = \tan y \cdot \tan 3y = 1$, lo cual es cierto si $y + 3y = 4y$ es un múltiplo impar de $\pi/2$, y esto ocurre para todos los valores anteriores.

- Si $r = \tan 3y$ entonces se debe cumplir $rs = \tan y \cdot \tan 2y = 1$ y la $\tan 3y$ no está definida.

Por tanto solo queda por analizar los casos en que $r^2 - 1 \neq 0$ y $1 - st \neq 0$. Dividiendo los dos lados de la igualdad $2r(1 - st) = (r^2 - 1)(s + t)$ por $(r^2 - 1)(1 - st)$ resulta

$$\frac{2r}{1 - r^2} + \frac{s + t}{1 - st} = 0.$$

Estas expresiones por separado serían las correspondients a las fórmulas de la tangente del ángulo doble y de la tangente de la suma. Ahora, utilizando la última expresión, distinguiremos los siguientes casos:

- Si $r = \tan y$, $s = \tan 2y$, $t = \tan 3y$ entonces $\tan 2y + \tan 5y = 0$ que admite como soluciones los múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ inferiores a $\frac{7\pi}{2}$ con lo que

$$y \in \left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{6\pi}{7} \right\}.$$

- Si $r = \tan 2y$, $s = \tan y$, $t = \tan 3y$ entonces $\tan 4y + \tan 4y = 0$ que admite como soluciones los múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ inferiores a 4π, con lo que

$$y \in \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right\},$$

  y hemos rechazado $y = \frac{\pi}{2}$ ya que entonces $\tan y$ no sería un número real, y también $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$ ya que entonces $\tan(2y)$ tampoco sería un número real.

- Si $r = \tan 3y$, $s = \tan y$, $t = \tan 2y$ entonces $\tan 6y + \tan 3y = 0$ que admite como soluciones los múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ inferiores a $\frac{9\pi}{2}$, con lo que

$$y \in \left\{ \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9} \right\}.$$

Estos son todos los valores, y hemos terminado.

4. Calcular todos los pares de enteros (x, y) tales que

$$3^4 2^3 \left(x^2 + y^2\right) = x^3 y^3.$$

Solución. Nótese en primer lugar que si $xy = 0$, entonces $x^2 + y^2 = 0$, de donde resulta la solución $x = y = 0$. Nótese también que si $xy < 0$, entonces

$x^2+y^2<0$, absurdo, luego x, y tienen ambos el mismo signo. Como cambiar simultáneamente de signo a x y a y no altera la ecuación, podemos asumir a partir de este momento y sin pérdida de generalidad que x, y son ambos enteros positivos. Sean $x=3^m a$ e $y=3^n b$ con m, n enteros no negativos y a, b enteros coprimos y no divisibles por 3. Supongamos que $m \geq n$. Entonces la ecuación dad se transforma en

$$8((3^{m-n}a)^2+b^2)=3^{3m+n-4}a^3b^3.$$

Como todo cuadrado perfecto da resto 0 o 1 al dividir entre 3, como es bien conocido, el miembro de la izquierda no es divisible por 3 y para que se cumpla la ecuación debe ser el exponente de 3 en el término de la derecha igual a cero. Es decir, $3m+n-4=0$ y como $m \geq n \geq 0$ esto implica que $m=n=1$. La ecuación ahora se simplifica y queda

$$8(a^2+b^2)=a^3b^3.$$

Por la simetría de la expresión podemos suponer que $a \geq b$. Entonces

$$16a^2 \geq a^3b^3 \Leftrightarrow 16 \geq ab^3$$

y tenemos dos posibilidades (1) $b=2$ de donde resulta $a=2$, (2) $b=1$ pero en este caso los únicos valores posibles de a son $1, 2, 4, 8$ y no satisfacen la ecuación $a^3-8a^2-8=0$. Se deduce que $(a, b)=(2, 2)$ y $(x, y)=(6, 6)$. Finalmente, se tiene que las únicas soluciones posibles son:

$$(x, y)=(-6,-6), \qquad (x, y)=(0, 0), \qquad (x, y)=(6, 6).$$

5. Se consideran todos los pares (x, y) de números reales tales que $0 \leq x \leq y \leq 1$. Sea $M(x, y)$ el máximo valor del conjunto

$$A=\{xy, xy-x-y+1, x+y-2xy\}.$$

Hallar el mínimo valor que puede tomar $M(x, y)$ para todos estos pares (x, y).

Solución 1. Haciendo el cambio de variable $xy=p$, y $x+y=s$ y escribiendo los tres elementos del conjunto A en términos de s y p, tenemos

$$a=xy=p, \quad b=xy-x-y+1=(1-x)(1-y)=s-1+p, \quad c=s-2p$$

verificándose que $a+b+c=1$. Observemos que $s^2-4p=(x-y)^2 \geq 0$.

Ahora consideremos los siguientes casos:

- Si $0 \leq x \leq y \leq \dfrac{1}{3} \Rightarrow p = xy \leq \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow b = (1-x)(1-y) \geq \dfrac{4}{9}$.
- Si $c = s-2p \leq \dfrac{4}{9} \Rightarrow 0 \leq s^2-4p = \left(2p+\dfrac{4}{9}\right)^2 - 4p = 4\left(p-\dfrac{1}{9}\right)\left(p-\dfrac{4}{9}\right)$, de donde se deduce que $p \leq \dfrac{1}{9}$ ó $p \geq \dfrac{4}{9}$. Si $a = p \leq \dfrac{1}{9} \Rightarrow b \geq \dfrac{4}{9}, c = s-2p \leq \dfrac{4}{9}$ y si $a = p \geq \dfrac{4}{9} \Rightarrow b \leq \dfrac{1}{9}, c \leq \dfrac{4}{9}$. Por lo tanto, en cualquier caso
$$\max A \geq \frac{4}{9}$$

Para hallar el mínimo $\dfrac{4}{9}$, las desigualdades deberán ser igualdades y se tiene:

- $p = \dfrac{1}{9}, s-2p = \dfrac{4}{9} \Rightarrow s = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = y = \dfrac{1}{3}$,
- $p = \dfrac{4}{9}, s-2p = \dfrac{4}{9} \Rightarrow s = \dfrac{4}{3} \Rightarrow x = y = \dfrac{2}{3}$.

Solución 2. En primer lugar, se observa que $xy + (xy - x - y + 1) + (x + y - 2xy) = 1$. Así, si uno de los tres elementos de A vale $\frac{1}{9}$ o menos, entonces los otros dos suman $\frac{8}{9}$ o más, luego si el menor valor de A vale $\frac{1}{9}$ o menos, el mayor valor de A vale $\frac{4}{9}$ o más.

Supongamos que $xy \geq x+y-2xy$. Entonces, por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica se tiene que

$$3xy \geq x+y \geq 2\sqrt{xy}, \qquad \sqrt{xy} \geq \frac{2}{3},$$

y el mayor valor de A es al menos $xy \geq \frac{4}{9}$ en este caso.

Supongamos que $xy-x-y+1 \geq x+y-2xy$. Nuevamente por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, se tiene que

$$3xy+1 \geq 2(x+y) \geq 4\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(3\sqrt{xy}-1\right)\left(\sqrt{xy}-1\right) \geq 0.$$

La última desigualdad se verifica cuando $\sqrt{xy} \geq 1$, con lo que el mayor valor de A sería al menos $xy \geq 1$, o bien $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{3}$, para $xy \leq \frac{1}{9}$, y por la observación inicial el mayor valor de A sería $\frac{4}{9}$ o más.

En cualquier otro caso, $x+y-2xy$ es el mayor valor de A, y supongamos que es inferior a $\frac{4}{9}$. Es decir, $x+y-2xy < \frac{4}{9}$. Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, se obtiene

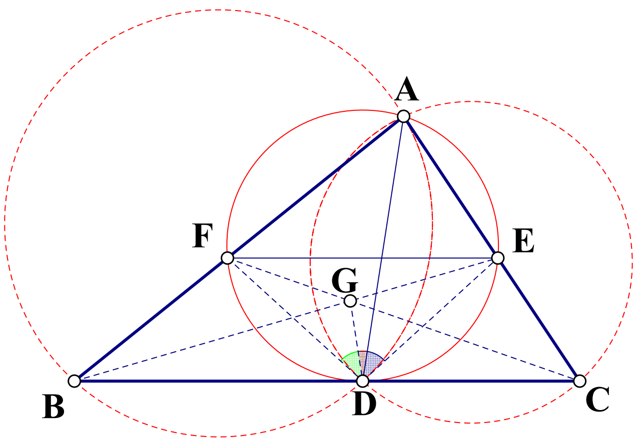
$$2xy + \frac{4}{9} > x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{xy}-\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{36} = \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

Si $\sqrt{xy} - \frac{1}{2} > \frac{1}{6}$, entonces $\sqrt{xy} > \frac{2}{3}$ y el mayor valor de A es al menos $xy > \frac{4}{9}$, contradicción. Si $\frac{1}{2} - \sqrt{xy} > \frac{1}{6}$, entonces $\sqrt{xy} < \frac{1}{3}$, con lo que $xy < \frac{1}{9}$, y por la observación inicial el mayor valor de A es mayor que $\frac{4}{9}$, contradicción.

Luego el mayor valor de A nunca puede ser menor que $\frac{4}{9}$, y ése valor es en efecto el mínimo que toma el máximo de A, pues se puede obtener $A = \left\{\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right\}$ tomando $x = y = \frac{2}{3}$, o $A = \left\{\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right\}$ tomando $x = y = \frac{1}{3}$. Viendo las condiciones de igualdad en los dos primeros casos analizados, se tiene además que éstos son todos los posibles pares de valores (x, y) para los que el mayor valor de A toma dicho valor mínimo.

6. En el triángulo escaleno ABC, la bisectriz del ángulo A corta al lado BC en el punto D. Las rectas que pasan por D y son tangentes a las circunferencias circunscritas de los triángulos ABD y ACD cortan a las rectas AC y AB en los puntos E y F, respectivamente. Si BE y CF se cortan en G, demostrar que los ángulos $\angle EDG$ y $\angle ADF$ son iguales.

Solución. Se verifican las igualdades de ángulos $\angle ADE = \angle B$ y $\angle ADF = \angle C$, por ser ángulos semiinscritos en las circunferencias (ABD) y (ADC), respectivamente. Por tanto el cuadrilátero $AFDE$ es inscriptible y de eso se



deduce que

$$\angle AFE = \angle ADE = \angle B \quad \text{y} \quad \angle AEF = \angle ADF = \angle C,$$

y por tanto, EF es paralela a BC. Además $DE = DF$ por ser cuerdas correspondientes al ángulo $\angle A/2$, así que el triángulo FDE es isósceles.

Sea M el punto medio de EF, $L = AD \cap EF$, y $H = DG \cap EF$. Aplicando el teorema de Thales, se obtiene que

$$\frac{LE}{LF} = \frac{DC}{BD}$$

Por otro lado, de $\triangle FGH \sim \triangle CGD$ resulta

$$\frac{HF}{DC} = \frac{GH}{GD},$$

de $\triangle EGH \sim \triangle BGD$, se obtiene

$$\frac{HE}{BD} = \frac{GH}{GD}$$

y de aquí que

$$\frac{HF}{HE} = \frac{DC}{DB},$$

luego H y L son simétricos respecto de M, como vermos mas tarde, y $\angle LDM = \angle HDM = \alpha$ siendo

$$\alpha = 90^\circ - \angle ADC = \frac{\angle C - \angle B}{2} \text{ si } C > B,$$

y

$$\alpha = 90^\circ - \angle ADB = \frac{\angle B - \angle C}{2} \text{ si } B > C.$$

Finalmente, se tiene que

$$\angle GDE = \angle ADE - \alpha = \angle ADF \text{ si } B > C,$$

y

$$\angle GDE = \angle ADE + \alpha = \angle ADF \text{ si } B < C.$$

Ahora falta probar que L y H son simétricos respecto a M. En efecto, si denotamos $LF + LE = HF + HE = s$, entonces

$$\frac{LE}{LF} = \frac{HF}{HE},$$

de donde

$$\frac{s}{LF} = \frac{s}{HE} \Rightarrow LF = HE \text{ y } LE = HF$$

con lo que $HM = ML$ como se quería demostrar.

Agradecimientos

Agradecemos a los proponentes de los problemas sus contribuciones para formar la Lista Corta de la que se han seleccionado los seis Problemas de la competición y al profesor Juan Manuel Conde y sus colaboradores por la selección de los mismos.