# Problemas y soluciones

**1.** *Encontrar todas las soluciones de la ecuación*

$$nm = k(n+m)$$

*donde $n$ y $m$ son números enteros y $k$ es un número primo mayor o igual a* 2.

**Solución.** Podemos escribir la ecuación como $n(m-k) = km$.
Si $m = k$, la ecuación conduciría a $nk = k(n+k)$, lo que implica $k^2 = 0$, lo que sería imposible.
Por tanto, podemos escribir $n = \frac{km}{m-k}$. Llamando a $m - k = t$, tenemos que $n = \frac{k(t+k)}{t} = k + \frac{k^2}{t}$. Dado que $k$ es un número primo los posibles valores de $t$, divisores de $k^2$, serán $t = 1$, $-1$, $k$, $-k$, $k^2$, $-k^2$ para los que se obtienen las siguientes soluciones:

- $t = 1, m = k+1, n = k+k^2 \Rightarrow (n, m, k) = (k+k^2, k+1, k)$,
- $t = -1, m = k-1, n = k-k^2 \Rightarrow (n, m, k) = (k-k^2, k-1, k)$,
- $t = k, m = k+k = 2k, n = k+k = 2k \Rightarrow (n, m, k) = (2k, 2k, k)$,
- $t = -k, m = k-k = 0, n = k-k = 0 \Rightarrow (n, m, k) = (0, 0, k)$,
- $t = k^2, m = k+k^2, n = k+1 \Rightarrow (n, m, k) = (k+1, k+k^2, k)$,
- $t = -k^2, m = k-k^2, n = k-1 \Rightarrow (n, m, k) = (k-1, k-k^2, k)$.

**2.** *Cuenta la leyenda que un velero pirata llegó a una remota isla perseguido por galeones españoles y, en ella, el capitán escondió el botín que llevaba a bordo, fruto de sus abordajes. Desembarcó, con sus secuaces, en una playa desierta donde había una palmera y una roca. Clavó en la playa su espada y, desde ella, caminó en linea recta hasta la palmera. Estando en ella giró* 90° *en sentido contrario de las agujas del reloj y anduvo (siempre en línea recta) la misma distancia anterior, en donde hincó una estaca. Volvió a la posición de la espada y caminó, también en línea recta, hasta la roca y, girando* 90° *en el sentido de las agujas del reloj, repitió la misma distancia, y del mismo modo, hasta un punto en donde clavó otra estaca. Buscó el punto medio entre las dos estacas y allí ordenó enterrar el tesoro. De inmediato mandó recoger la espada y las estacas para, así, proteger la situación exacta del tesoro. Volvió al barco con su tripulación y siguió con sus fechorías hasta que pasaron diez años. Entonces volvió a la isla y desenterró el tesoro. ¿Cómo consiguió localizar el tesoro con la ayuda, únicamente, de la situación de la palmera y de la roca, que aún permanecían allí?*

**Solución.** Se considera un sistema de ejes cartesiano, de forma que la palmera está en $(-a, 0)$ y la roca en $(a, 0)$.

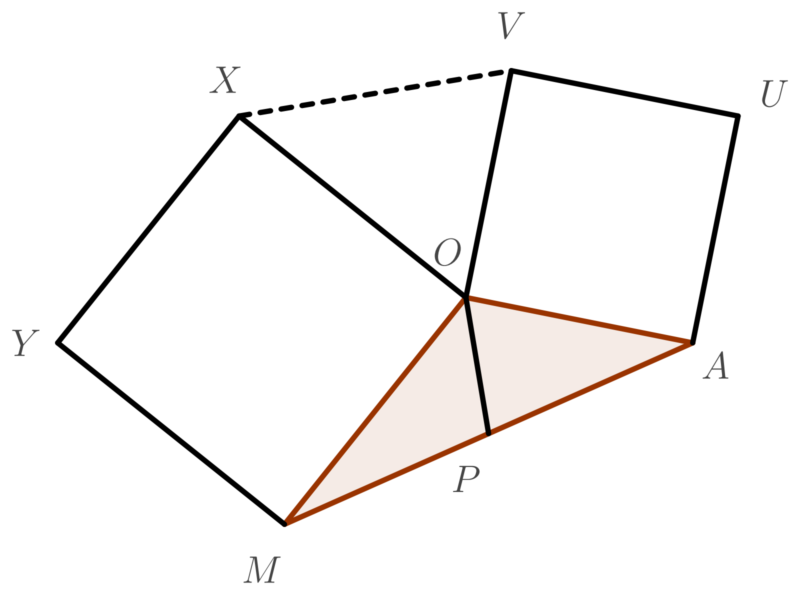
La espada está en un punto cualquiera $(p, q)$. Siguiendo las instrucciones, la primera estaca está en $(-a + q, -a - p)$ y la segunda en $(a - q, -a + p)$. El punto medio de estos dos, donde está el tesoro es $(0, -a)$, que es independiente de $(p, q)$.
Basta por tanto ir andando desde la palmera a la roca, llegar al punto medio, girar 90º en el sentido de las agujas del reloj y caminar la misma distancia en esta dirección.

**3.** *Dado un triángulo $\triangle OMA$, en los lados $OM$ y $OA$ se construyen cuadrados (en el exterior del triángulo) $OXYM$ y $OAUV$, respectivamente.*

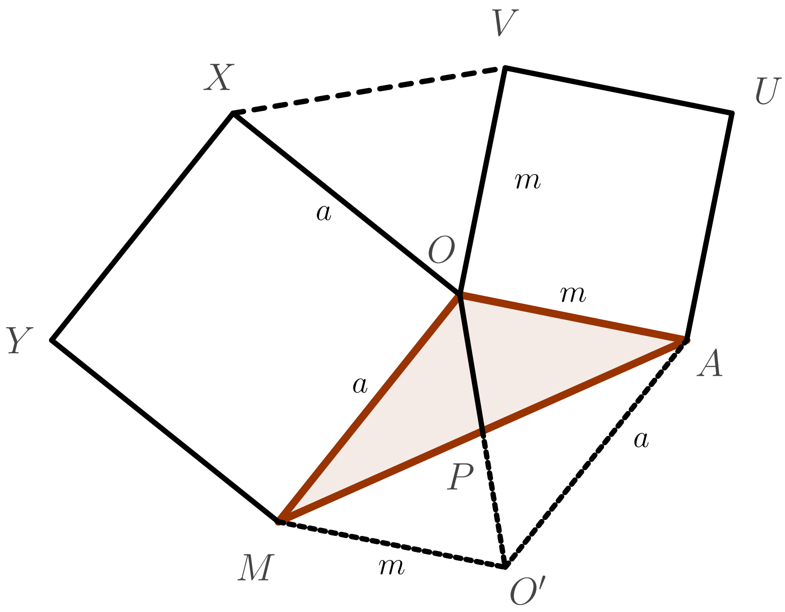
1. *Prueba que el segmento $XV$ mide el doble de la mediana trazada desde el vértice $O$.*

2. *Prueba que si la prolongación de la mediana corta al segmento $XV$, lo hace de forma perpendicular. (En realidad, las rectas que contienen a la mediana y al segmento $XV$ son siempre perpendiculares.)*

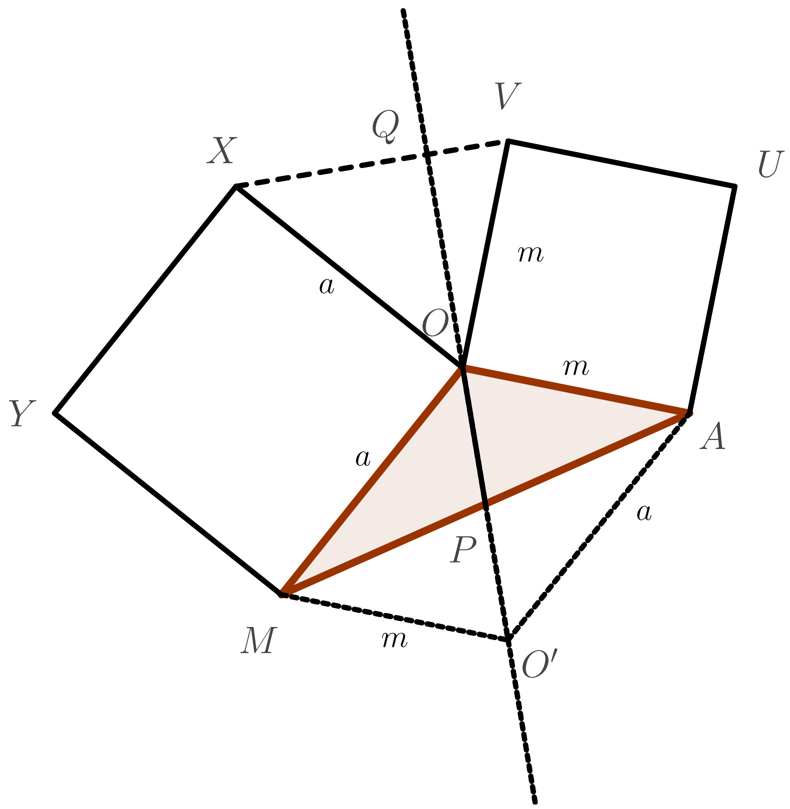
**Solución.** Se tiene la siguiente situación.




Vamos a dibujar un paralelogramo a partir del triángulo $\triangle OMA$.




Si identificamos los lados con su longitud, se tiene que $OM = OX = AO'$, y por el mismo razonamiento se tiene que $OA = OV = MO'$.
Por otro lado $\angle MOA + \angle O'AO = 180^o$, ya que $OMO'A$, y también $\angle AOM + 90^o + \angle XOV + 90^o = 360^o$, esto es, $\angle AOM + \angle XOV = 180$, de donde se deduce la igualdad $\angle XOV = \angle O'AO$. Como consecuencia, los triángulos $\triangle XOV$ y $\triangle O'AO$ son iguales, ya que tienen igual un ángulo e iguales los lados que lo forman. Se deduce entonces que $XV = OO'$, y tenemos el primer resultado.
(2). En este caso, prolongamos la mediana hasta cortar al segmento $XV$,




Como $OA$ es perpendicular a $OV$, y $\angle AOO' = \angle OVX$, en el triángulo $\triangle OVQ$ el ángulo $\angle VQO$ es recto, ya que la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es $180^o$.

**4.** *Se considera una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que verifica las propiedades*

1. $f(2n) = f(2n+1) + 1$,
2. $f(2n+1)\, f(2(n+1)) = 4n^2 + 6n$,
3. $f(2020) = 2021$.

*Determina la expresión de $f$, esto es, $f(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

**Solución.** De $f(2n+1)\, f(2(n+1)) = 4n^2 + 6n$, tomando $n = 1009$, se tiene:

$$f(2019)f(2020) = 4 \times 1009^2 + 6 \times 1009 = 2018 \times 2021,$$

y utilizando que $f(2020) = 2021$, se tiene $f(2019) = 2018$. Utilizando ahora la propiedad (1) para $n = 1009$, se tiene $f(2018) = f(2019) + 1 = 2018 + 1 = 2019$. Supongamos que se verifica $f(2n) = 2n + 1$. Hemos visto que el resultado es cierto para $n = 1010$ y para $n = 1009$. Tomando $n = m + 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}
&f(2m+1)f(2(m+1)) = 4m^2 + 6m,\\
&f(2m+1)(2(m+1)+1) = 2m(2m+3),\\
&f(2m+1) = 2m
\end{aligned}$$

Tenemos entonces $f(2m) = f(2m+1) + 1 = 2m + 1$. Por tanto hemos obtenido $f(2(n-1)) = 2(n-1) + 1$.

Comenzando en $n = 1010$, llegamos a que $f(2n) = 2n + 1$ para $n \leq 1010$. En particular, $f(0) = 1$, y $f(2n + 1) = 2n$, para $n \leq 1009$.
Para valores mayores de $n$ jugamos de la misma forma, ya que se tiene $f(2020) = f(2021) + 1$, entonces $f(2021) = f(2020) - 1 = 2019$. A partir de $f(2n)$ obtenemos $f(2n + 1)$, y utilizando (2) se obtiene $f(2(n + 1))$. Suponemos que $f(2n) = 2n + 1$ y $f(2n + 1) = 2n$ para $n \leq 1010$, y probamos que el resultado es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \\ n - 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$