

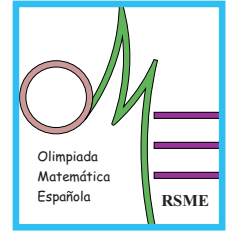


LVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Sesión única

Mañana del viernes 22 de enero de 2021



1. Demostrar que todos los números racionales pueden expresarse como suma de algunas fracciones de la forma $\frac{n-1}{n+2}$, con $n \geq 0$ entero, admitiendo repetir sumandos.
2. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo verificando $AB > BC$, $CD = DA$ y $\angle ABD = \angle DBC$. Sea E el punto de la recta AB tal que $\angle DEB = 90^\circ$. Probar que $AE = \frac{AB - BC}{2}$.
3. En un torneo de ajedrez participan ocho maestros durante siete días. Cada día se disputan cuatro partidas en las cuales participan todos los maestros, y al finalizar el torneo todos se han enfrentado contra todos exactamente una vez. Demostrar que al terminar el quinto día del torneo existe un conjunto de al menos cuatro maestros que ya han jugado entre ellos todas las partidas.
4. Determinar todas las funciones f tales que

$$f(xf(y) + y) = f(xy) + f(y)$$

para cualesquiera números reales x, y .

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo máximo de la sesión es de 4 horas.**