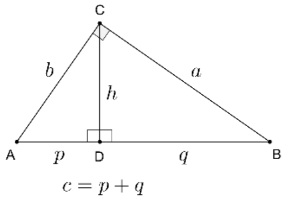
Taller de Geometría (18/3/22):

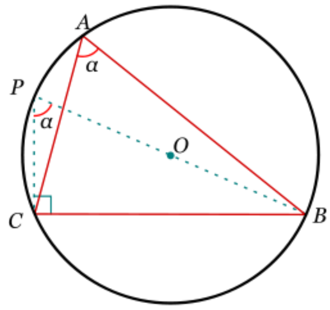
Teorema de la altura. *En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional con las partes en las que divide a ésta.*

Demostración por semejanza de triángulos. Los triángulos ACD y CBD son semejantes por igualdad de ángulos. Por tanto AD/CD=CD/BD



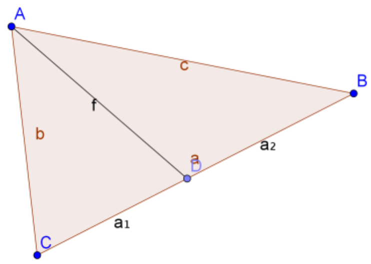
Teorema del Seno. *En todo triángulo ABC se verifica que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos correspondientes. La proporción es el diámetro de la circunferencia circunscrita*: $\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C} = 2R$

Demostración por el teorema del ángulo inscrito, el ángulo en P coincide con el ángulo en A



Teorema de la Bisectriz (interior). *La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados del ángulo:*

$$\frac{a_1}{b} = \frac{a_2}{c}$$

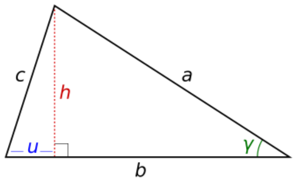


Demostración: aplicar el teorema del seno a los triángulos *ADC, ADB y ABC*:

$$\frac{a_1}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{f}{\sin C} \;\; ; \;\; \frac{a_2}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{f}{\sin B} \;\; ; \;\; \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Teorema del Coseno. *En todo triángulo ABC de lados a, b, c se verifica que:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\hat{C}$$

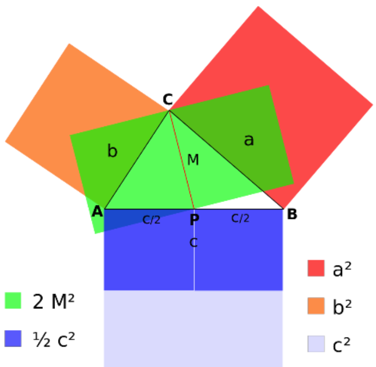


Demostración: aplicar el teorema de Pitágoras y la definición de coseno de *C*:

$$c^2 = u^2 + h^2 = u^2 + a^2 - (b-u)^2 = a^2 + b^2 - 2b(b-u) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$

Teorema de la Mediana (o de Apolonio). *En un triángulo ABC de lados a, b, c se traza la mediana desde C, de longitud M. Se verifica que:*

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2M^2$$



Demostración: Aplicar la fórmula del coseno a los ángulos que forma la mediana con el lado c y sumar.

Movimientos del plano. Homotecias.

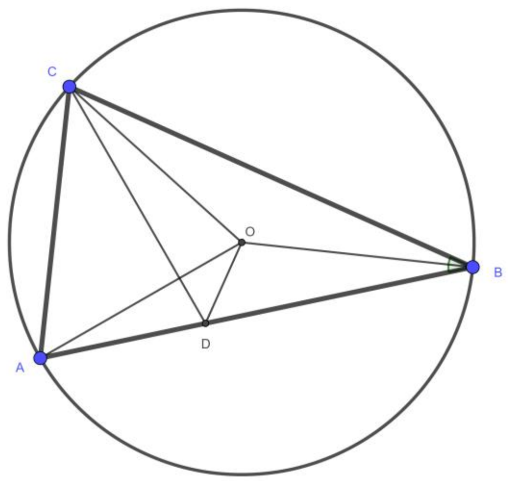
Recordar los tipos de movimientos: traslaciones, giros, simetrías y simetrías con deslizamiento, con sus elementos característicos. Recordar las homotecias, centro y razón.

Bisectrices (interiores) de un triángulo. Son las rectas que dividen el ángulo interior en dos ángulos iguales. La simetría de eje una bisectriz del triángulo transforma un lado en el otro.

Existencia del incentro. Todo punto de la bisectriz equidista de los dos lados que la definen. El punto de corte de dos bisectrices equidista de los tres lados, luego está en la tercera bisectriz.

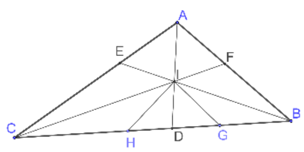
Problema nº 3 Fase local 2006. *En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC.*

Si el ángulo OBC mide α, también OBD es α, por ser OB la bisectriz. Por ser O el circuncentro, OCB y OAB son α; por ser OC una bisectriz, también OCD es α. Luego DCB es 2α; por CD una bisectriz, ACD es también 2α. OCA es 3α; por ser O circuncentro, OAC también es 3α. En suma, los ángulos del triángulo ABC miden 2α, 4α y 4α. Como la suma es 180º se concluye que los ángulos son 36º, 72º y 72º.



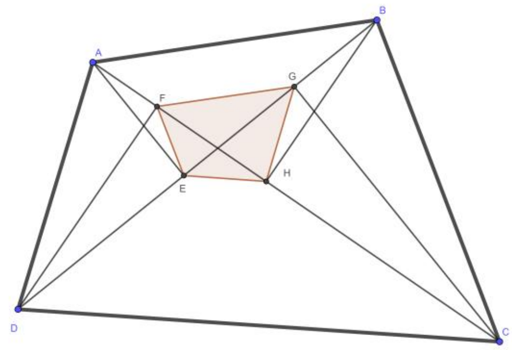
Problema Fase Local OME 2021 (nº 3 ampliado de 4). *En el triángulo ABC con lado mayor BC, las bisectrices se cortan en I. Las rectas AI, BI, CI cortan a BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Se consideran puntos G y H en los segmentos BD y CD, respectivamente, tales que $\angle GID = \angle ABC$ y $\angle HID = \angle ACB$. Probar que $\angle BHE = \angle CGF = \angle CAB$.*

Solución Comenzamos con una figura, donde se señalan algunas igualdades de ángulos que inmediatamente justificaremos

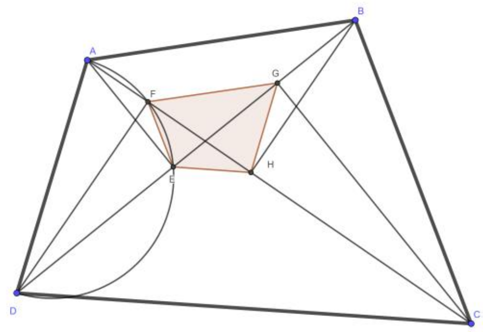


Nótese que los triángulos ABD y GID tienen un ángulo común en D y ángulos iguales en B y en I, por lo que sus terceros ángulos deben coincidir, es decir $\angle DGI = \angle DAB$. De forma análoga, razonando con los triángulos ACD y HID se obtiene $\angle DHI = \angle DAC$. Los triángulos BIA y BIH resultan ser congruentes por tener dos ángulos iguales y un lado común, esto revela que los puntos A y H son simétricos con respecto a la recta BI, y de forma similar A y G son simétricos respecto de CI. Las simetrías que acabamos de establecer prueban que: $\angle BHE$ = BAE y $\angle CGF = \angle CAF$, y queda demostrada la igualdad de ángulos que se pedía.

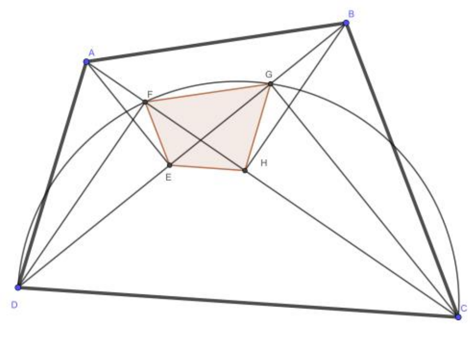
Problema nº 2 Fase Local OME 2008. *En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demuestra que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.*



Los puntos AFED están sobre una semicircunferencia de diámetro AD, porque la circunferencia circunscrita a los triángulos AFD y AED es la misma. Lo mismo sucede con los cuadriláteros AEHB, BGHC y CHED. Fijándonos en AFED, observamos que el ángulo inscrito ADB es el suplementario del AFE (en general, en un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios), pero AFE es suplementario de EFH, luego ADB=EFH.

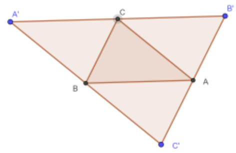


Usando el cuadrilátero CHED, por el teorema del ángulo inscrito, se tiene la igualdad de ángulos BDC=GFH. Sumando ADC= ADB+BDC=EFH+GFH=EFG, y similarmente se hace con los restantes ángulos del cuadrilátero.



Alturas de un triángulo. Son las rectas perpendiculares a un lado trazadas desde el vértice opuesto.

Existencia del ortocentro. Para demostrar que las tres alturas de un triángulo ABC son concurrentes en un punto, se trazan paralelas a los lados pasando por los vértices. Se construye así un nuevo triángulo A'B'C'



Como ABCB', ABA'C, CBC'A, CBAB', ACBC' son paralelogramos, sus lados son iguales, luego A,B,C son los puntos medios de los lados de A'B'C'. Por tanto, las alturas de ABC son las mediatrices de A'B'C' que se cortan en un punto, que se llama ortocentro de ABC.

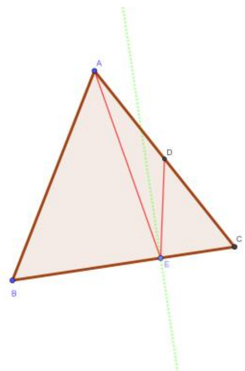
Existencia del baricentro. Se puede demostrar (usando propiedades de homotecias o de vectores) que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto, llamado baricentro, o centro de gravedad del triángulo.

Recta de Euler. Siguiendo con el razonamiento anterior se puede probar que el ortocentro, circuncentro y baricentro de un triángulo están alineados, la recta común se llama recta de Euler.

Fórmulas del área *S* de un triángulo, conocidos:

1. Base, b, y altura h: $S = \frac{1}{2} bh$
2. Dos lados a,b y el ángulo $\hat{C}$ que abarcan: $S=\frac{1}{2}\, ab \sin \hat{C}$

Problema Fase Local OME 2019 (nº 3) (ligeramente adaptado). *Sea ABC un triángulo equilátero de lado 6. Un rayo de luz parte de A, rebota en el lado BC, en el punto E, y corta al lado AC en su punto medio D. Calcular el área del triángulo ADE*



El criterio de semejanza ALA nos permite afirmar que los triángulos ABE y DCE son semejantes, y la razón de semejanza es ½, ya que el ángulo en E de ambos triángulos es el mismo por la propiedad de reflexión de la luz; el ángulo en B del primero y en C del segundo es 60º, y AB=2DC. Por tanto el área del primero es 4 veces el área del segundo, y BE=2EC. Por tanto EC=2, BE=4, CD=3. Si aplicamos la fórmula 2 del área, tenemos que el área de los triángulos ABC, ABE y DCE es, respectivamente, $9\sqrt{3},\ 6\sqrt{3},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}$. El cálculo restante ya es trivial.

3. Lados *a,b,c* (fórmula de Herón). Si $p=(a+b+c)/2$, y R es el circunradio:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ =\ \frac{abc}{4R}$$

4. Semiperímetro e inradio r: $S = pr$

Problema Fase Local OME 2019 (nº 4) (ligeramente adaptado). *Sea $p\geq 3$ un número entero y consideremos el triángulo rectángulo de cateto mayor p^2-1 y cateto menor 2p. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor y es tangente a la hipotenusa. Calcule el radio r del semicírculo, en función de p. Determine los valores de p para los que r es también entero.*

5. Coordenadas de los vértices (a_1,a_2), (b_1,b_2), (c_1,c_2),

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2\\ 1 & b_1 & b_2\\ 1 & c_1 & c_2\end{vmatrix}$$

Problema Fase Local OME 2022 (nº2/4) mañana. *Sea ABC un triángulo isósceles con ∠BAC = 100º. La bisectriz del ángulo ∠CBA corta al lado AC en el punto D. Probar que BD + DA = BC.*

Solución 1 (con trigonometría). Usando el teorema del seno sobre el triángulo *BDA* y sobre el triángulo *BCD* se tiene que

$$\frac{DA}{\sin 20}=\frac{BD}{\sin 100} \quad \text{y} \quad \frac{BC}{\sin 120}=\frac{BD}{\sin 40},$$

por tanto $BD+DA=BD\left(1+\frac{\sin 20}{\sin 100}\right)=BC\frac{\sin 40}{\sin 120}\left(1+\frac{\sin 20}{\sin 100}\right)$. Se sabe que $\sin 120=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Queda probar que

$$\frac{2\sin 40}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{\sin 20}{\sin 100}\right)=1,$$

que equivale a

$$2\sin 40(\sin 100+\sin 20)=\sqrt{3}\sin 100$$

Utilizando la fórmula

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

Queda: $\sin 100+\sin 20=\sqrt{3}\cos 40$. Con la fórmula del seno del ángulo doble, y como $\sin 100=\sin 80$, se concluye el resultado buscado.

Solución 2 (sintética). Sea *E* el punto simétrico de *A* respecto de la recta *BD*. Entonces *E* está en *BC*, y los triángulos *ABD* y *EBD* son iguales, por tanto, *AD=DE* y el triángulo *CDE* tiene ángulos de 40º, 60º y 80º. Sea *F* el (único) punto de *BD*, fuera del segmento *BD*, tal que *DF=AD*. Entonces el triángulo *CDF* es igual que el *CDE* por el criterio LAL: *DF=DE=AD*, *CD* es común y el ángulo entre ambos es 60º. Nos fijamos ahora en el triángulo *CBF* que es isósceles por tener los ángulos en *C* y *F* iguales a 80º, luego *BC=BD+DF=BD+AD*, que es lo que se quería probar.

Problema 2. Fase Local OME 2022 (nº2/4) tarde. Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo y sea *P* un punto en el interior. Si se cumple que área(*PAB*) · área(*PCD*) = área(*PBC*) · área(*PDA*), demostrar que *P* se encuentra en el segmento *AC* o en el segmento *BD*.

Solución. Podemos reescribir la igualdad del enunciado como

área(*PAB*) /área(*PDA*) = área(*PBC*) área(*PCD*) .

Sea *E* el punto donde *AP* corta a *BD*, y sea *F* el punto donde *CP* corta a *BD*. Dado que los triángulos *PAB* y *PBC* tienen un lado común, se tiene que

área(*PAB*) /área(*PDA*) = altura de *B* sobre *AP* / altura de *D* sobre *AP* = *BE / DE* ,

donde la segunda igualdad se cumple por semejanza de triángulos. Igualmente se cumple que

área(*PBC*) área(*PCD*) = *BF / DF* .

Por lo tanto tenemos que *BE/DE* = *BF/DF*. Si desplazamos *E* desde *B* hasta *D*, el numerador de la fracción crece y el denominador decrece, por lo que la fracción es creciente. Deducimos así que *E* = *F*.

Si *P* está sobre *AC*, hemos acabado. Si no lo está, las rectas *AP* y *CP* son distintas, y se cortan como mucho en un punto. Dado que se cortan en *P* y en *E*, se deduce que *P* = *E*, y por tanto *P* está en *BD*, como queríamos demostrar.

Problema 2/4 OMA 2022. Sea *ABC* un triángulo isósceles, con *AB* = *AC*. Sea *P* un punto cualquiera del segmento *BC*, no en los extremos, y *N* el punto medio de *AP*. Se construye el trapecio (convexo) $M_1M_2N_2N_1$ con: M_1 punto medio de *BP*, M_2 punto medio de *PC*, M_1N_1 y M_2N_2 perpendiculares a *BC*, tales que *N*, N_1 y N_2 están alineados. Demostrar que el área del trapecio es la mitad del área del triángulo dado.

Solución 1 El triángulo NM_1M_2 es el homotético del *ABC* con la homotecia de centro *P* y razón ½, por tanto también es isósceles. Además $M_1M_2 = BC/2$, y si *E* es el pie de la perpendicular desde *N* a *BC*, entonces, *E* es punto medio de M_1M_2. Por tanto, el área del trapecio $M_1M_2N_2N_1$ es $NE \cdot M_1M_2 = (AD/2)(BC/2)$ que es la mitad del área del triángulo dado.

Solución 2. Tomando un sistema de referencia en el que *BC* es el eje de abcisas y *D* el origen de coordenadas, se tiene: $A = (0, a), B = (-b, 0), C = (b, 0), P = (c, 0)$ Entonces $N = (c/2, a/2), M_1 = ((c-b)/2 , 0), M_2 = ((c + b)/2 , 0), N_1 = ((c-b)/2 , x), N_2 = ((c + b)/2 , y)$. La exigencia de que *N*, N_1 y N_2 estén alineados se corresponde a que $0 = 4(a - x - y)$. Por tanto, la condición equivale a que $x + y = a$. Si *T* y *S* son las áreas del trapecio y del triángulo, respectivamente: $T = (x + y)/2 \cdot M_1M_2 = ab/2$, $S = ab$.