PREPARACIÓN OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA (CURSO 2021-22)

POLINOMIOS 26-11-2021

Resumen teórico: Fórmulas de Cardano-Vieta.
Teorema del resto.
Regla de Ruffini.

-) Definición. Polinomio mónico. Raíces de un polinomio.

-) Número de raíces de un polinomio. Fórmulas para el cálculo de las raíces. Raíces enteras.

-) División de un polinomio entre *(x-a)*. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Descomposición en producto de factores. Cálculo de raíces enteras y fraccionarias.

-) Caso $(x^n - a^n):(x-a)$. Consecuencias para el caso de polinomios con coeficientes enteros.

-) Fórmulas de Cardano-Vieta.

Cuestiones:

+) Escribe todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que verifican
P(1)=0, P(2)=0.

+) Escribe todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que verifican
P(1)=0, P(2)=0, P(3)=0, P(4)=0.

+) Escribe todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que verifican
P(1)=1, P(2)=1, P(3)=1, P(4)=1.

+) Escribe todos los polinomios de grado 3 que verifican
P(1)=1, P(2)=2, P(3)=3.

1) Si *a, b, c* son las tres raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, calcula $a^2 + b^2 + c^2$

2) Las tres raíces del polinomio $x^3 - 14x^2 + Bx - 84$ son los lados de un triángulo rectángulo. Halla B.

3) Sea $n \geq 1$ y *P(x)* un polinomio de coeficientes enteros que cumple que los números *P(1), P(2), …, P(n)* son *1, 2, …., n* (aunque no necesariamente en el mismo orden). Demuestra que uno de los números *P(0)* o *P(n+1)* es múltiplo de *n!*.

4) Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios P(x) que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor $x \in \mathbb{R}$. (Fase Local 2019)

5) Consideramos el polinomio

$$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y solamente si *a=b=c*. (Fase Local 2020)

6) Se dice que un polinomio de coeficientes reales, *p(x)* , es almeriense si es de la forma

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + a$$

y sus tres raíces son tres números reales positivos en progresión aritmética. Halla todos los polinomios almerienses tales que *p(7/4)=0*. (Fase Nacional 2020)

7) Sobre la gráfica de una función polinómica con coeficientes enteros, se eligen dos puntos con coordenadas enteras. Probar que si la distancia entre ellos es un número entero, entonces el segmento que los une es paralelo al eje de abscisas. (Fase Nacional 2015)

8) Sean *a* y *b* enteros. Demuestra que la ecuación $(x-a)(x-b)(x-3)+1=0$ admite a lo sumo una solución entera. (Fase Nacional 2015)

9) Un polinomio mónico de cuarto grado verifica que *P(1)=10, P(2)=20, P(3)=30.* Calcula P(12)+P(-8). (Olimpiada Internacional)

10) Encuentra todos los polinomios *P(x)* que satisfacen

$$P(x^2+1) = (P(x))^2 + 1,$$

para todo *x* real. (Olimpiada Internacional)

11) El polinomio *P(x)* tiene coeficientes enteros. Prueba que si *P(0)* y *P(1)* son impares, entonces *P(x)* no puede tener raíces enteras (Am. Math. Monthly. Vol 17, nº2)