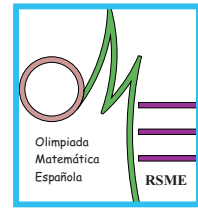




LVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Primera fase, curso 2021 - 2022



Tarde del viernes 21 de enero de 2022

Sesión única

Problema 1 . En una fila, hay 2022 personas. Cada una de ellas, o siempre miente o siempre dice la verdad. Todos ellos afirman: "hay más mentirosos a mi izquierda que personas que digan la verdad a mi derecha".

Determinar cuántos mentirosos hay en la fila.

Problema 2 . Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea P un punto en el interior. Si se cumple que

$$\text{área}(PAB) \cdot \text{área}(PCD) = \text{área}(PBC) \cdot \text{área}(PDA),$$

demostrar que P se encuentra en el segmento AC o en el segmento BD .

Problema 3 . Hallar todas las ternas de números reales (a, b, c) que cumplan el sistema

$$\begin{aligned}a + b + c &= 3 \\2^a + 2^b + 2^c &= 7 \\2^{-a} + 2^{-b} &= 3/4\end{aligned}$$

Problema 4 . Encontrar todos los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales tales que

$$p(x) + p(y) + p(z) + p(x + y + z) = p(x + y) + p(y + z) + p(z + x)$$

para cualesquiera números reales x, y, z .

*No está permitido el uso de calculadoras,
libros, o dispositivos electrónicos.
Cada problema vale 7 puntos.
Tiempo máximo: 4 horas.*