LVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Primera fase, curso 2021 - 2022

Enunciados y soluciones - Mañana del viernes

Problema 1. *Un número n de siete cifras es bonito si se puede expresar como la suma de dos números de siete cifras s y t, tales que todas las cifras de s son impares y todas las cifras de t son pares. Determinar cuáles de los siguientes números son bonitos: 6204773, 6372538, 7343053, 8993267, 9652393.*

Solución. Afirmamos que los números 6204773 y 9652393 son bonitos, mientras que 6372538, 7343053 y 8993267 no lo son.

$$\begin{array}{rccccccc} & {\scriptstyle \ell_1} & {\scriptstyle \ell_2} & {\scriptstyle \ell_3} & {\scriptstyle \ell_4} & {\scriptstyle \ell_5} & {\scriptstyle \ell_6} & {\scriptstyle \ell_7} \\ & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\ + & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 & t_7 \\ \hline & n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 & n_7 \end{array}$$

Escribimos la suma $s + t = n$ de la forma mostrada, la habitual para realizar la suma manualmente. El número ℓ_i es 1 si se tiene llevada de la columna $i + 1$, y 0 en caso contrario. Como en el método habitual, se tiene que $n_i = s_i + t_i + \ell_i$ si no se tiene llevada a la columna siguiente (es decir, $\ell_{i-1} = 0$) y $n_i = s_i + t_i + \ell_i - 10$ si se tiene llevada ($\ell_{i-1} = 1$). Como $s_i + t_i$ es siempre impar, tendremos que $\ell_i = 1$ si n_i es par, y $\ell_i = 0$ si n_i es impar. Esto nos permite descartar los tres números que no son bonitos. Supongamos que es posible escribir estos tres números como $s + t$:

- Para 6372538, como n_7 es par tenemos que $\ell_7 = 1$, pero esto es imposible porque no existe una octava columna de la que traer llevada.
- Para 7343053, como n_4 es impar tenemos que $\ell_4 = 0$, y así obtenemos una contradicción porque $0 = n_5 = s_5 + t_5 + \ell_5 \geq 1 + 0 + 0 = 1$.
- Para 8993267, como n_1 es par tenemos que $\ell_1 = 1$, y así obtenemos una contradicción porque $9 = n_2 = s_2 + t_2 + \ell_2 - 10 \leq 9 + 8 + 1 - 10 = 8$.

En los dos casos en los que el número es bonito, usando la información anterior se pueden hallar los valores de $s_i + t_i$, a partir de lo cual encontrar valores de s y t resulta sencillo. Por ejemplo, uno puede escribir 6204773=3715971+2488802 y 9652393=3371551+6280842.

Problema 2. *Sea ABC un triángulo isósceles con $\angle BAC = 100°$. La bisectriz del ángulo $\angle CBA$ corta al lado AC en el punto D. Probar que $BD + DA = BC$.*

Solución 1 (con trigonometría). Usando el teorema del seno en los dos primeros casos sobre el triángulo BDA y en el tercero sobre el triángulo BCA se tiene que

$$BD = \frac{\sin 80° \cdot BA}{\sin 60°}, \quad DA = \frac{\sin 20° \cdot BA}{\sin 60°}, \quad BC = \frac{\sin 80° \cdot BA}{\sin 40°}.$$

Obsérvese que hemos utilizado también que $\sin 80° = \sin 100°$.
Por lo tanto, la igualdad del enunciado se reduce a establecer que

$$\sin 80° + \sin 20° = \frac{\sin 80° \sin 60°}{\sin 40°}.$$

Para ello, hacemos uso de la fórmula para la suma de senos, que afirma que

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

Por tanto,

$$\sin 80° + \sin 20° = 2 \sin 50° \cos 30° = 2 \cos 40° \sin 60° = \frac{\sin 80°}{\sin 40°} \sin 60°,$$

donde se ha usado para concluir la fórmula del seno del ángulo doble.

Solución 2 (sintética). Sea E el único punto del segmento BC tal que $BD = BE$. Si establecemos que $AD = EC$ el enunciado quedará probado. Para ello, veremos que $AD = DE = EC$.
Comenzamos observando que $ADEB$ es cíclico, puesto que $\angle BAD + \angle DEB = 100° + 80° = 180°$. Aquí hemos usado que $BD = BE$ por construcción, y por tanto el triángulo BDE es isósceles con $\angle EBD = 20°$. De aquí tenemos que ADE es isósceles puesto que $\angle DEA = \angle DBA = 20°$ y $\angle DAE = \angle DBE = 20°$.
Por otro lado, $\angle DEC = 100°$, lo que muestra que EDC es isósceles con $ED = EC$, tal y como se quería.

Problema 3. *Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ números reales diferentes, de manera que ninguno de ellos es igual a 0. Supongamos que*

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_5^2\right)\left(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_6^2\right) = \left(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_5 a_6\right)^2.$$

Probar que los números $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ están en progresión geométrica.

Solución. Sea

$$\Delta = \left(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_5 a_6\right)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_5^2\right)\left(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_6^2\right).$$

Entonces Δ es el discriminante del polinomio de segundo grado

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_5^2)x^2 - 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_5 a_6)x + (a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_6^2) = 0.$$

Reagrupando términos,

$$(a_1 x^2 - 2a_1 a_2 x + a_2^2) + (a_2 x^2 - 2a_2 a_3 x + a_2^2) + \ldots + (a_5 x^2 - 2a_5 a_6 x + a_6^2) = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$(a_1 x - a_2)^2 + (a_2 x - a_3)^2 + \ldots + (a_5 x - a_6)^2 = 0.$$

Como $\Delta = 0$, el polinomio tiene una raíz doble, digamos r, y entonces

$$(a_1 r - a_2)^2 + (a_2 r - a_3)^2 + \ldots + (a_5 r - a_6)^2 = 0.$$

De aquí tendremos que $a_2 = a_1r, a_3 = a_2r, a_4 = a_3r, a_5 = a_4r, a_6 = a_5r$, y por lo tanto los números están en progresión geométrica.

Problema 4. *Un grupo de 12 piratas de edades diferentes se reparte 2022 monedas, de manera que cada pirata (salvo el más joven) tiene una moneda más que el siguiente más joven. A continuación, cada día se procede de la siguiente manera. Se escoge a un pirata que tenga al menos 11 monedas, y ese da una moneda a todos los demás. Encontrar el mayor número de monedas que un pirata puede llegar a tener.*

Solución. La respuesta es $2022-(0+1+2+\ldots+10) = 1967$. Observemos que en cada paso las cantidades que tienen los piratas son siempre módulo 12 una permutación de los números $0, 1, 2, \ldots, 11$. En el momento inicial eso está claro. Para los pasos siguientes podemos proceder por inducción, dado que si en un momento las cantidades son $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$, en el siguiente serán

$$(a_1 - 11, a_2 + 1, \ldots, a_{12} + 1) \equiv (a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_{12} + 1) \pmod{11}.$$

Por tanto, la mejor opción posible es llegar a la configuración

$$(0, 1, 2, \ldots, 1967).$$

Numeramos a los piratas por orden de edad como $p_1, \ldots, p_{12}$, siendo p_1 el más joven. Para conseguir la configuración donde un pirata acaba con 1967 monedas, procedemos de la siguiente manera: primero se escoge a p_{11}, luego a p_{10} y así sucesivamente hasta llegar a p_1, de manera que después de 11 turnos todos los piratas salvo el que empezaba con más monedas habrán perdido exactamente una (en una ocasión pierden once y en diez ocasiones ganan una). Este proceso se puede repetir hasta que estos once piratas tengan como cantidades $0, 1, \ldots, 10$ y el mayor de todos atesore 1967 monedas.

Enunciados y soluciones - Tarde del viernes

Problema 1. *En una fila, hay 2022 personas. Cada una de ellas, o siempre miente o siempre dice la verdad. Todos ellos afirman: "hay más mentirosos a mi izquierda que personas que digan la verdad a mi derecha". Determinar cuántos mentirosos hay en la fila.*

Solución. Vamos a numerar a las personas de izquierda a derecha según su posición en la fila como $p_1, p_2, \ldots, p_{2022}$. En primer lugar, probaremos que todos los p_i con $1 \leq i \leq 1011$ son mentirosos. En el caso de p_1, como no hay personas a su izquierda, sabemos que el enunciado no puede ser cierto, con lo que necesariamente p_1 ha de ser un mentiroso. Procederemos ahora por inducción, suponiendo probado que las k personas más a la izquierda son mentirosas, donde $1 < k < 1011$. Si p_{k+1} dijese la verdad, tendría k mentirosos a su izquierda y por tanto un máximo de $k-1$ personas que dicen la verdad a su derecha, con lo que hay estrictamente más de $2021 - 2k$ mentirosos a su derecha. Tomemos ahora el mentiroso más a la derecha. Este tendrá al menos $2021 - 2k + k = 2021 - k$ mentirosos a su izquierda y a lo sumo $k - 1$ que dicen la verdad a su derecha. Como es un mentiroso, ha de pasar que $2021 - k \leq k - 1$, lo cual implica que $k \geq 1011$, lo cual es una contradicción.
Vamos a probar ahora que las 1011 personas restantes dicen la verdad. Tomemos a un individuo cualquiera p_k, con $1012 \leq k \leq 2021$. Esta persona tendrá al menos a 1011 mentirosos a su izquierda, que siempre serán más que los que tenga a su derecha. Así que necesariamente deberá decir la verdad.
Por tanto, se concluye que 1011 personas mienten y 1011 dicen la verdad.

Problema 2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea P un punto en el interior. Si se cumple que*

$$\textit{área}(PAB) \cdot \textit{área}(PCD) = \textit{área}(PBC) \cdot \textit{área}(PDA),$$

demostrar que P se encuentra en el segmento AC o en el segmento BD.

Solución. Podemos reescribir la igualdad del enunciado como

$$\frac{\text{área}(PAB)}{\text{área}(PDA)} = \frac{\text{área}(PBC)}{\text{área}(PCD)}.$$

Sea E el punto donde AP corta a BD, y sea F el punto donde CP corta a BD. Dado que PAB y PBC tienen un lado común, se tiene que

$$\frac{\text{área}(PAB)}{\text{área}(PDA)} = \frac{\text{altura de } B \text{ sobre } AP}{\text{altura de } D \text{ sobre } AP} = \frac{BE}{DE},$$

donde la segunda igualdad se cumple por semejanza de triángulos. Igualmente se cumple que
$$\frac{\text{área}(PBC)}{\text{área}(PCD)} = \frac{BF}{DF}.$$
Por lo tanto tenemos que $BE/DE = BF/DF$. Si desplazamos E desde B hasta D, el numerador de la fracción crece y el denominador decrece, por lo que la fracción es creciente. Deducimos así que $E = F$.
Si P está sobre AC, hemos acabado. Si no lo está, las rectas AP y CP son distintas, y se cortan como mucho en un punto. Dado que se cortan en P y en E, se deduce que $P = E$, y por tanto P está en BD, como queríamos demostrar.

Problema 3. *Hallar todas las ternas de números reales* (a, b, c) *que cumplan el sistema*

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ 2^a + 2^b + 2^c &= 7 \\ 2^{-a} + 2^{-b} &= 3/4 \end{aligned}$$

Solución. Denotamos $u = 2^a$, $v = 2^b$ y $w = 2^c$. La segunda ecuación del sistema puede escribirse como $u + v + w = 7$, y la tercera como $u^{-1} + v^{-1} = 3/4$. También podemos obtener una relación entre u, v y w de la primera ecuación:

$$uvw = 2^a 2^b 2^c = 2^{a+b+c} = 2^3 = 8.$$

En la tercera ecuación, sustituimos a partir de la primera y la segunda:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv} = \frac{7-w}{\frac{8}{w}}.$$

Esta última igualdad se puede escribir como $w^2 - 7w + 6 = 0$, que tiene como soluciones $w = 6$ y $w = 1$. Consideramos ambos casos:

- Si $w = 6$, las dos primeras ecuaciones dejan $uv = 4/3$ y $u + v = 1$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera produce $u(1 - u) = 4/3$, o $u^2 - u + 4/3 = 0$, que no tiene solución real.

- Si $w = 1$, las dos primeras ecuaciones dejan $uv = 8$ y $u + v = 6$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera produce $u(6 - u) = 8$, o $u^2 - 6u + 8 = 0$, que tiene soluciones $u = 4$ y $u = 2$. Esto lleva a las posibles soluciones $(u, v, w) = (4, 2, 1)$ y $(u, v, w) = (2, 4, 1)$. Tomando logaritmos, se obtiene $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ y $(a, b, c) = (1, 2, 0)$. Se comprueba que ambas soluciones satisfacen el sistema inicial.

Problema 4. *Encontrar todos los polinomios* $p(x)$ *con coeficientes reales tales que*

$$p(x) + p(y) + p(z) + p(x + y + z) = p(x + y) + p(y + z) + p(z + x)$$

para cualesquiera números reales x, y, z.

Solución. Comenzamos observando que cuando $x = y = z = 0$ la ecuación dada se escribe como
$$4p(0) = 3p(0),$$

que automáticamente implica que $p(0) = 0$. Sustituimos ahora (x, y, z) por $(x, x, -x)$. Entonces,

$$3p(x) + p(-x) = p(2x). \tag{1}$$

Sea n el grado de p, y escribamos $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Entonces, el coeficiente con x^n en el lado izquierdo de (1) es $a_n \cdot (3 + (-1)^n)$, y en el lado derecho es $a_n \cdot 2^n$. Esto implica que

$$3 + (-1)^n = 2^n.$$

Si n es par, entonces $3 + 1 = 2^n$, que es cierto si $n = 2$. Si n es impar, tendremos que $n = 1$. Entonces, los únicos posibles candidatos con los polinomios de grado a lo sumo 2 y cuyo término constante es 0, esto es,

$$p(x) = ax^2 + bx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Comprobamos ahora que estos polinomios cumplen las condiciones del enunciado. Como la condición es linear, es suficiente comprobar que tanto $p_1(x) = x$ como $p_2(x) = x^2$ funcionan. Esto se sigue de la comprobación

$$x + y + z + (x + y + z) = (x + y) + (y + z) + (z + x)$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2zx + z^2 + x^2 + 2zx.$$

Por tanto, cualquier polinomio de la forma $p(x) = ax^2 + bx$, con $a, b \in \mathbb{R}$, satisfacen la condición dada, y estos son los únicos.