SESIÓN VARIADA

Antonio Medinilla, Adrián Macías, David Ramos y Laura García

10 febrero 2023

Problema 1. Calcular la siguiente suma:

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + ... + \sqrt{1 + \frac{1}{2002^2} + \frac{1}{2003^2}}$$

Problema 2. Sea $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ una función que cumple:

1) $f(1) = f(2^k) = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^+$
2) Si $n \in \mathbb{Z}^+$, $2^k > n \Longrightarrow f(2^k + n) = f(n) + 1$

Calcula $\max_{1 \leq k \leq 2001} f(k)$ y halla el menor entero positivo n que cumple $f(n) = 2001$.

Problema 3. Sea $P(x)$ un polinomio. Demostrar que la gráfica de $P(x)$ es simétrica con respecto al punto (a, b) si y sólo si existe otro polinomio $Q(x)$ tal que:

$$P(x) = b + (x - a)Q((x - a)^2)$$

Problema 4. Sea $ABCDEFG$ un heptágono regular de lado 1. Probar que $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$.

Problema 5. ¿Existen polinomios de segundo grado $f(x), g(x), h(x)$ tales que las soluciones a la ecuación $f(g(h(x))) = 0$ sean 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

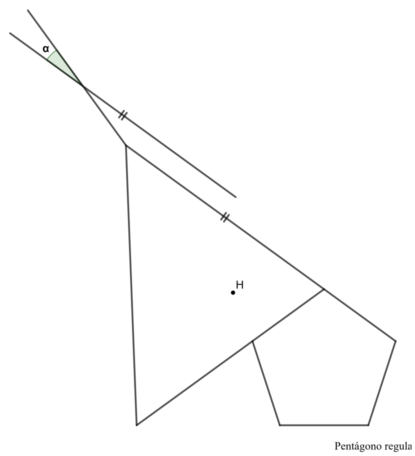
Problema 6. Sea una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) \leq x$ y $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. Probar que $f(x) = x$.

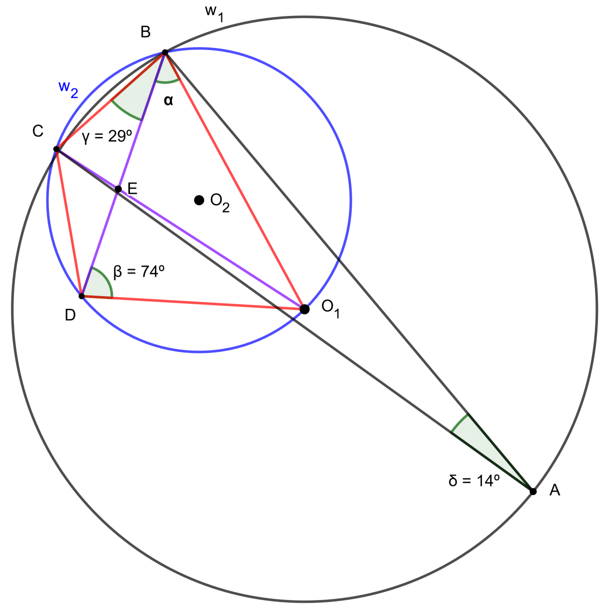
Problema 7. Sean a, b, c enteros positivos tales que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$$

Demostrar que abc es un cubo perfecto.

Problema 8. Usando el alfabeto $A = 0, 1, 2$ una palabra se dice válida si cualesquiera dos letras consecutivas en la palabra no difieren en más de una unidad. ¿Cuántas palabras válidas se pueden formar?





Problema 9: Caza de Ángulos. Halle α en cada caso en las figuras de arriba.

Problema 10. En cada casilla de una cuadrícula N x N con N $\in \mathbb{Z}^+$ se escribe un número real con valor absoluto menor que 1, de forma que la suma de los números en cada cuadrado 2 x 2 es 0. Pruebe que la suma de todos los números es menor que N.

Problema 11. Sea un triángulo ABC arbitrario. El lado $\overline{BC}$ está trisecado por los puntos P y Q, siendo, de ellos dos, P el punto más cercano a B. El lado $\overline{AC}$ está bisecado por el punto R. Halle la razón:

$$\overline{B(BR \cap AP)} : \overline{(BR \cap AP)(BR \cap AQ)} : \overline{(BR \cap AQ)R}$$

Problema 12. Pruebe que

$$n! > 3^{n-2}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 3$.

Problema 13. Sea $S = \{n \in \mathbb{Z}^+ |$ los únicos primos en la factorización de n son 2, 3 ó 5$\}$. Calcular $\sum_{x \in S} \frac{1}{x}$.

Problema 14. Dado $k \in \mathbb{Z}^+$, se define $\zeta(k) = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \ldots$. Demostrar las siguientes igualdades:

$$a) \sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1 \qquad\qquad b) \sum_{k=1}^{\infty} (\zeta(2k) - 1) = \frac{3}{4}$$