

Preparación Olimpiada Matemática Española

Polinomios

13/01/2023

Ejercicio 1 (Adaptado de seminario de problemas Universidad Rioja). Encuentra todos los polinomios de grado 5 tales que $P(0) = P(2) = P(5) = P(7) = 2023$

Ejercicio 2 (Seminario de problemas Universidad Rioja). Si p es un número real y las raíces de $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ están en progresión aritmética, halla dichas raíces.

Ejercicio 3 (Seminario de problemas Universidad Rioja). Sean x_1, x_2 las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$, y x_3, x_4 las raíces de la ecuación $x^2 + p'x + q' = 0$, donde $pp'qq' \neq 0$. Probar que si $x_1x_4 = x_2x_3$, entonces $(p/p')^2 = q/q'$.

Ejercicio 4 (Seminario de problemas Universidad Rioja). Halla el rango de valores de k para que la ecuación $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = k$ tenga cuatro soluciones distintas.

Ejercicio 5 (Seminario de problemas Universidad Rioja). Encontrar todos los polinomios $P(x)$ de coeficientes enteros no negativos tales que $P(1) = 8, P(2) = 2022$.

Ejercicio 6 (Seminario de problemas Universidad Rioja). Sean α y β las soluciones de la ecuación $(x-2)(x-3) + (x-3)(x+1) + (x+1)(x-2) = 0$. Calcula

$$\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} + \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)}$$

Ejercicio 7 (Baltic Way 2013, P2). Sean k y n enteros positivos y $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_n$ números enteros distintos. Un polinomio P con coeficientes enteros cumple $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_k) = 54$ y $P(y_1) = P(y_2) = \dots = P(y_n) = 2013$. Determina el mayor valor posible de kn .

Ejercicio 8 (Baltic Way 2015, P3). Sea $n > 1$ un entero. Encuentra todos los polinomios reales no constantes $P(x)$ tales que, para cualquier x real, se cumple

$$P(x)P(x^2)P(x^3) \dots P(x^n) = P(x^{\frac{n(n+1)}{2}})$$

Ejercicio 9 (Baltic Way 2021, P19). Encuentra todos los polinomios $p(x)$ de coeficientes enteros tales que $p(a) - p(b)$ es divisible por $a + b$ para cualesquiera enteros a, b , con la condición $a + b \neq 0$.

Ejercicio 10 (Adaptado de Baltic Way 2019, P20). Sea un polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros tal que

$$P(-1) = -4, P(-3) = -40, \text{ y } P(-5) = -156.$$

¿Pueden existir algún entero x tal que

$$P(P(x)) = x^2?$$

Ejercicio 11 (Baltic Way 2013, P20). Encuentra todos los polinomios f con coeficientes enteros no negativos tales que para cualesquiera p primo, n natural, se cumple que $f(p^n) = q^m$ para algún q primo, m natural.