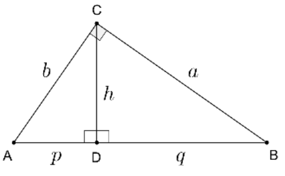
Taller básico de Geometría (13/1/23):

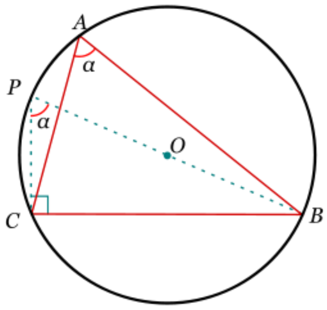
Teorema de la altura. *En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional con las partes en las que divide a ésta.*

Demostración por semejanza de triángulos. Los triángulos ACD y CBD son semejantes por igualdad de ángulos. Por tanto, AD/CD=CD/BD



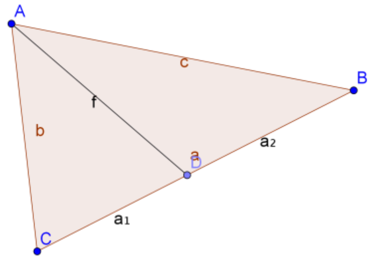
Teorema del Seno. *En todo triángulo ABC se verifica que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos correspondientes. La proporción es el diámetro de la circunferencia circunscrita*: $\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C} = 2R$

Demostración por el teorema del ángulo inscrito, el ángulo en P coincide con el ángulo en A



Teorema de la Bisectriz (interior). *La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados del ángulo:*

$$\frac{a_1}{b} = \frac{a_2}{c}$$

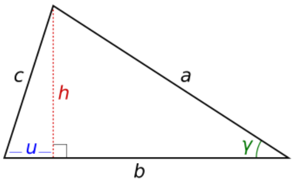


Demostración: aplicar el teorema del seno a los triángulos *ADC, ADB y ABC*:

$$\frac{a_1}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{f}{\sin C} \quad ; \quad \frac{a_2}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{f}{\sin B} \quad ; \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Teorema del Coseno. *En todo triángulo ABC de lados a, b, c se verifica que:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\hat{C}$$

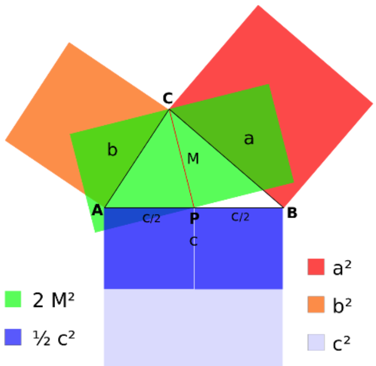


Demostración: aplicar el teorema de Pitágoras y la definición de coseno de *C*:

$$c^2 = u^2 + h^2 = u^2 + a^2 - (b-u)^2 = a^2 + b^2 - 2b(b-u) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$

Teorema de la Mediana (o de Apolonio). *En un triángulo ABC de lados a, b, c se traza la mediana desde C, de longitud M. Se verifica que:*

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2M^2$$



Demostración: Aplicar la fórmula del coseno a los ángulos que forma la mediana con el lado c y sumar.

Movimientos del plano. Homotecias.

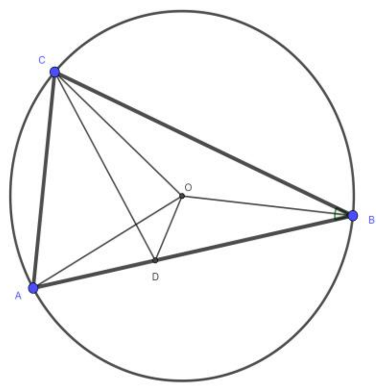
Recordar los tipos de movimientos: traslaciones, giros, simetrías y simetrías con deslizamiento, con sus elementos característicos. Recordar las homotecias, centro y razón, que transforman rectas en rectas paralelas.

Bisectrices (interiores) de un triángulo. Son las rectas que dividen el ángulo interior en dos ángulos iguales. La simetría de eje una bisectriz del triángulo transforma un lado en el otro.

Existencia del incentro. Todo punto de la bisectriz equidista de los dos lados que la definen. El punto de corte de dos bisectrices equidista de los tres lados, luego está en la tercera bisectriz.

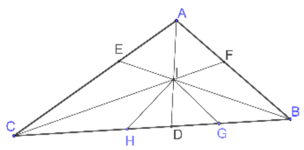
Problema nº 3 Fase local 2006. *En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC.*

Solución. Si el ángulo *OBC* mide α, también *OBD* es α, por ser *OB* la bisectriz. Por ser *O* el circuncentro, *OCB* y *OAB* son α; por ser *OC* una bisectriz, también *OCD* es α. Luego *DCB* es 2α; por *CD* una bisectriz, *ACD* es también 2α. *OCA* es 3α; por ser *O* circuncentro, *OAC* también es 3α. En suma, los ángulos del triángulo *ABC* miden 2α, 4α y 4α. Como la suma es 180º se concluye que los ángulos son 36º, 72º y 72º.



Problema Fase Local OME 2021 (nº 3 ampliado, de 4). *En el triángulo ABC con lado mayor BC, las bisectrices se cortan en I. Las rectas AI, BI, CI cortan a BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Se consideran puntos G y H en los segmentos BD y CD, respectivamente, tales que ∠GID = ∠ABC y ∠HID = ∠ACB. Probar que ∠BHE = ∠CGF=∠CAB.*

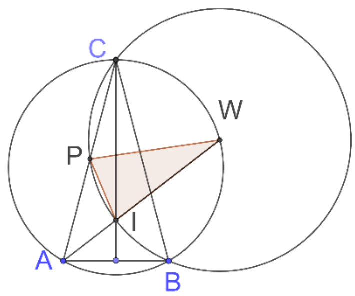
Solución. Comenzamos con una figura, donde se señalan algunas igualdades de ángulos que inmediatamente justificaremos



Nótese que los triángulos *ABD* y *GID* tienen un ángulo común en *D* y ángulos iguales en *B* y en *I*, por lo que sus terceros ángulos deben coincidir, es decir ∠*DGI* = ∠*DAB.* De forma análoga, razonando con los triángulos *ACD* y *HID* se obtiene ∠*DHI* = ∠*DAC*. Los triángulos *BIA* y *BIH* resultan ser congruentes por tener dos ángulos iguales y un lado común, esto revela que los puntos *A* y *H* son simétricos con respecto a la recta *BI*, y de forma similar *A* y *G* son simétricos respecto de *CI*. Las simetrías que acabamos de establecer prueban que*:* ∠*BHE* = *BAE* y ∠*CGF* = ∠*CAF*, y queda demostrada la igualdad de ángulos que se pedía.

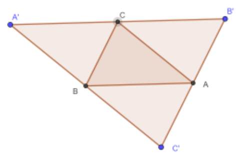
Problema I Campus Andaluz, nº 2 (2022). *Sea ABC un triángulo con BC = AC distintos de AB. Sea W el punto medio del arco BC (de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC) que no contiene a A. La circunferencia de centro W que pasa por C vuelve a cortar a la recta AC en un punto P. Si I es el incentro del triángulo ABC, demuestra que los triángulos ABC y PIW son semejantes.*

Solución. Los ángulos *CAW* y *WAB* son iguales por estar inscritos en la circunferencia circunscrita a *ABC* y abarcar los mismos arcos. Por tanto, la recta *AW* es una bisectriz interior de *AB*, por lo que pasa por *I*. Llamamos α al ángulo *CAW*, igual a *CBW*, igual a *WCB*, por la misma razón anterior. El triángulo isósceles dado tiene ángulos: 2α, 2α y π-4α, mientras que el triángulo *BIW* tiene los mismos ángulos, *AWB* igual al *ACB* por ser inscritos que abarcan el mismo arco y el *IBW* es suma de *IBC*=α más *CBW*=α*.* En suma, los triángulos *ABC* y *BIW* son semejantes. Si hacemos una simetría del triángulo *BIW* respecto de la bisectriz *AW* se tiene un nuevo triángulo, que es *PIW*, ya que el simétrico de *B* respecto de la bisectriz es un punto del lado *AC*, y la distancia de *PW* es igual que *BW*=*CW*, luego está en la circunferencia de centro *W* que pasa por *C*.



Alturas de un triángulo. Son las rectas perpendiculares a un lado trazadas desde el vértice opuesto.

Existencia del ortocentro. Para demostrar que las tres alturas de un triángulo *ABC* son concurrentes en un punto, se trazan paralelas a los lados pasando por los vértices. Se construye así un nuevo triángulo *A'B'C'*



Como *ABCB', ABA'C, CBC'A, CBAB', ACBC'* son paralelogramos, sus lados son iguales, luego *A*,*B*, *C* son los puntos medios de los lados de *A'B'C'*. Por tanto, las alturas de *ABC* son las mediatrices de *A'B'C'* que se cortan en un punto, que se llama ortocentro de *ABC*.

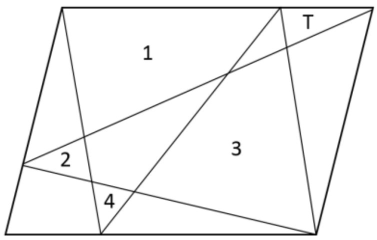
Existencia del baricentro. Se puede demostrar (usando propiedades de homotecias o de vectores) que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto, llamado baricentro, o centro de gravedad del triángulo.

Recta de Euler. Siguiendo con el razonamiento anterior se puede probar que el ortocentro, circuncentro y baricentro de un triángulo están alineados, la recta común se llama recta de Euler.

Fórmulas del área *S* de un triángulo, conocidos:

1. Base *b*, y altura *h*: $S = \frac{1}{2} bh$

Problema CO+2022 de Bachillerato. *La parte exterior de la figura adjunta es un paralelogramo. Las líneas que unen lados del paralelogramo son rectas, formando 7 triángulos y 4 cuadriláteros. Las áreas del cuadrilátero 1, el triángulo 2, el cuadrilátero 3 y el triángulo 4 son, respectivamente, 72, 10, 79 y 8. ¿Cuál es el área del triángulo T?*



Solución. Con base en cada lado mayor del paralelogramo y vértice en el lado opuesto hay dos triángulos, cuya suma de áreas, por tanto, coinciden. De ahí se deduce una ecuación con las áreas de las partes en que se dividen. Con base en cada lado menor del paralelogramo hay un triángulo o dos, cuya suma de áreas coinciden. Del sistema de ecuaciones final se deduce que $T=9$.

Problema. *Demuestra que en un triángulo equilátero ABC, la suma de las distancias de cualquier punto interior P a los tres lados es independiente de P. Si Q no se encuentra en el interior de ABC, demuestra que la suma de distancias de Q a los tres lados es mayor o igual a aquella de P.*

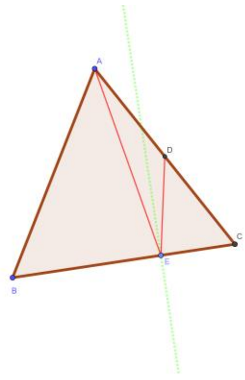
Solución. Sean *X*, *Y* y Z las proyecciones de *P* en *AB*, *BC* y *CA*, respectivamente. Entonces tenemos que

$PX+PY+PZ = 2\cdot$área$(ABP)/AB + 2\cdot$área$(BCP)/BC + 2\cdot$área$(CAP)/CA = 2\cdot$área$(ABC)/AB$,

que no depende de *P*. Si *Q* no está en el interior de *ABC* usamos el mismo cálculo con área(*ABQ*) + área(*BCQ*) + área(*CAQ*) $\geq$ área(*ABC*).

2. Dos lados *a*,*b* y el ángulo $\hat{C}$ que abarcan: $S=\frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$

Problema Fase Local OME 2019 (nº 3) (ligeramente adaptado). *Sea ABC un triángulo equilátero de lado 6. Un rayo de luz parte de A, rebota en el lado BC, en el punto E, y corta al lado AC en su punto medio D. Calcular el área del triángulo ADE*



El criterio de semejanza ALA nos permite afirmar que los triángulos *ABE* y *DCE* son semejantes, y la razón de semejanza es ½, ya que el ángulo en *E* de ambos triángulos es el mismo por la propiedad de reflexión de la luz; el ángulo en *B* del primero y en *C* del segundo es 60º, y *AB=2DC*. Por tanto el área del primero es 4 veces el área del segundo, y *BE=2EC*. Por tanto *EC=2, BE=4, CD=3*. Si aplicamos la fórmula 2 del área, tenemos que el área de los triángulos *ABC, ABE* y *DCE* es, respectivamente, $9\sqrt{3},\ 6\sqrt{3},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}$. El cálculo restante ya es trivial.

3. Lados *a,b,c* (fórmula de Herón). Si *p=(a+b+c)/2*, y *R* es el circunradio:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$$

4. Semiperímetro e inradio *r*: $S = pr$

Problema Fase Local OME 2019 (nº 4) (ligeramente adaptado). *Sea p ≥ 3 un número entero y consideremos el triángulo rectángulo de cateto mayor* p^2*-1 y cateto menor 2p. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor y es tangente a la hipotenusa. Calcule el radio r del semicírculo, en función de p. Determine los valores de p para los que r es también entero.*

5. Coordenadas de los vértices $(a_1,a_2), (b_1,b_2), (c_1,c_2)$,

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Problema 2/4 OMA 2022. *Sea ABC un triángulo isósceles, con AB = AC. Sea P un punto cualquiera del segmento BC, no en los extremos, y N el punto medio de AP. Se construye el trapecio (convexo)* $M_1M_2N_2N_1$ *con:* M_1 *punto medio de BP,* M_2 *punto medio de PC,* M_1N_1 *y* M_2N_2 *perpendiculares a BC, tales que N,* N_1 *y* N_2 *están alineados. Demostrar que el área del trapecio es la mitad del área del triángulo dado.*

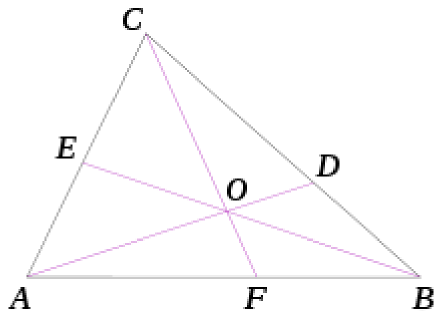
Solución 1 El triángulo NM_1M_2 es el homotético del *ABC* con la homotecia de centro *P* y razón ½, por tanto también es isósceles. Además $M_1M_2 = BC/2$, y si *E* es el pie de la perpendicular desde *N* a *BC*, entonces, *E* es punto medio de M_1M_2. Por tanto, el área del trapecio $M_1M_2N_2N_1$ es $NE \cdot M_1M_2 = (h/2)(BC/2)$ (donde *h* es la altura del triángulo *ABC*), que es la mitad del área del triángulo dado.

Solución 2. Tomando un sistema de referencia en el que *BC* es el eje de abscisas y *D* el origen de coordenadas, se tiene: $A = (0, a), B = (-b, 0), C = (b, 0), P = (c, 0)$ Entonces $N = (c/2, a/2)$, $M_1 = ((c-b)/2, 0)$, $M_2 = ((c+b)/2, 0)$, $N_1 = ((c-b)/2, x)$, $N_2 = ((c+b)/2, y)$. La exigencia de que *N*, N_1 y N_2 estén alineados se corresponde a que $0 = 4(a - x - y)$. Por tanto, la condición equivale a que $x + y = a$. Si *T* y *S* son las áreas del trapecio y del triángulo, respectivamente: $T = (x + y)/2 \cdot M_1M_2 = ab/2$, $S = ab$.

Teorema de Ceva. *Dado un triángulo ABC, y los puntos D, E, y F que se encuentran sobre los lados BC, CA, y AB respectivamente, los segmentos AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si* $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$

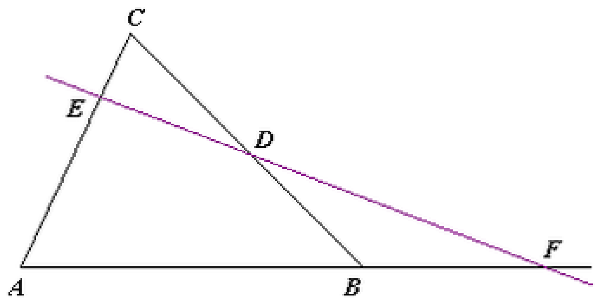
Esta relación es fácil de recordar si recorremos el perímetro del triángulo en un sentido. El primer segmento es el determinado por el vértice de partida al punto de división que se encuentra sobre el lado en el que nos estamos moviendo, el segundo segmento es el que va desde este último punto al segundo vértice, y así sucesivamente, hasta retornar al vértice de partida.

Demostración del teorema directo: Comprobar que el cociente *AF/FB* coincide con el cociente de las áreas de los triángulos *OAF y OBF*, así como con el cociente de las áreas de los triángulos *CAF* y *CBF*. De aquí se deduce que el cociente *AF/FB* coincide con el cociente de las áreas de los triángulos *OAC* y *OBC*. Lo análogo con las otras dos fracciones. El resto es muy simple.



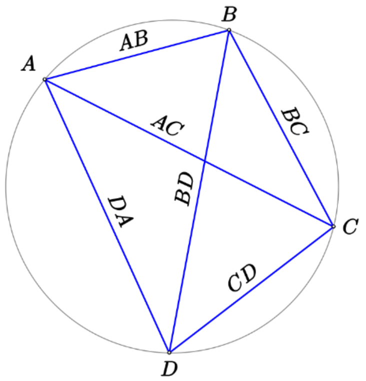
Teorema de Menelao. *Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados (o sus prolongaciones) BC, CA y AB, respectivamente. Entonces los puntos D, E y F son colineales (o están alineados) si y sólo si* $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1$

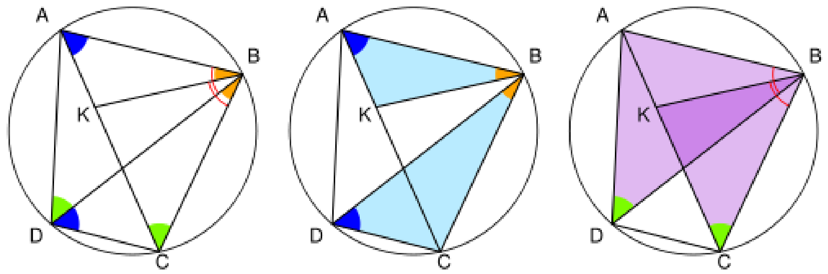
Nótese que la relación anterior usa segmentos dirigidos.



Demostración del teorema directo: trazar perpendiculares desde *A*, *B* y *C* a la recta *DE*. Sean *P*, *P'* y *P''* los pies de las respectivas perpendiculares. Aplicar el teorema de Thales para expresar los cocientes del enunciado como cocientes de los segmentos dirigidos *AP*, *BP'* y *CP''*. El resto es muy simple.

Teorema de Ptolomeo. *Cuatro puntos A, B, C, D dados son cíclicos (están en una misma circunferencia) si y sólo si el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de pares de lados opuestos: AC·BD=AB·CD+AD·BC*





Demostración.- Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Se verifica la igualdad de ángulos inscritos $\angle BAC = \angle BDC$, y $\angle ADB = \angle ACB$. Se construye el punto K de AC tal que se verifica la igualdad de ángulos $\angle ABK = \angle DBC$. Ahora, por ángulos comunes $\triangle ABK$ es semejante a $\triangle DBC$, y $\triangle ABD$ es semejante a $\triangle KBC$. Por lo tanto

$AK/AB = CD/BD$, y $CK/BC = DA/BD$, y de aquí, $AK{\cdot}BD = AB{\cdot}CD$, y $CK{\cdot}BD = BC{\cdot}DA$.

Lo que implica $AK{\cdot}BD + CK{\cdot}BD = AB{\cdot}CD + BC{\cdot}DA$, es decir, $(AK+CK){\cdot}BD = AB{\cdot}CD + BC{\cdot}DA$. Pero $AK+CK = AC$, por lo tanto $AC{\cdot}BD = AB{\cdot}CD + BC{\cdot}DA$.

Aplicación: encontrar la razón áurea entre diagonales y lados de un pentágono regular.

En un cuadrilátero cualquiera, no necesariamente cíclico, se tiene la desigualdad $AC{\cdot}BD \leq AB{\cdot}CD+AD{\cdot}BC$