Sesión de Preparación de Olimpiada Matemática.

17 de Febrero de 2023. Fernando Mayoral, mayoral@us.es

Problemas de OMAndaluzas.

Algunas herramientas relacionadas con los problemas considerados:

- Progresiones aritméticas. Suma de términos consecutivos.
- Representación gráfica de una recta, en el plano.
- Distancia entre dos puntos, en el plano.
- Hipérbolas $xy = k$ constante $\neq 0$.
- Búsqueda de factorizaciones. Factorización de $a^n - b^n$.
- Coordenadas. Punto medio de un segmento.
- Divisibilidad, paridad, propiedades de las desigualdades, estrategias,...

Problema 1 (OMA-2019). Encuentra todas las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ad = b + c \\ bc = a + d \end{cases}$$

donde a, b, c, d son enteros positivos tales que $a < b < c < d$.

Problema 2 (OMA-2019). En un tablero de ajedrez de tamaño $n \times n$ se escribe 1 ó -1 en cada una de sus casillas. Sea a_k el producto de todos los núumeros de la fila k, y sea b_m el producto de todos los números de la columna m. Si $n = 2019$, ¿Se pueden colocar los números de manera que la suma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

sea cero? ¿Y si $n = 2020$? *¿Para qué valores de n es posible?*

Problema 3 (OMA-2020). Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$nm = k(n + m)$$

donde n y m son números enteros y k es un núumero primo mayor o igual a 2.

Problema 4 (OMA-2020). Se considera una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (donde $\mathbb{N}$ es el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ de los núumeros naturales), que verifica las propiedades

1. $f(2n) = f(2n + 1) + 1$,
2. $f(2n + 1)f(2(n + 1)) = 4n^2 + 6n$,
3. $f(2020) = 2021$.

Determina la expresión de f, esto es, $f(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Problema 5 (OMA-2020). Cuenta la leyenda que un velero pirata llegó a una remota isla perseguido por galeones españoles y, en ella, el capitán escondió el botín que llevaba a bordo, fruto de sus abordajes. Desembarcó, con sus secuaces, en una playa desierta donde había una palmera y una roca. Clavó en la playa su espada y, desde ella, caminó en linea recta hasta la palmera. Estando en ella giró 90^o en sentido contrario de las agujas del reloj y anduvo (siempre en línea recta) la misma distancia anterior, en donde hincó una estaca. Volvió a la posición de la espada y caminó, también en línea recta, hasta la roca y, girando 90^o en el sentido de las agujas del reloj, repitió la misma distancia, y del mismo modo, hasta un punto en donde clavó otra estaca. Buscó el punto medio entre las dos estacas y allí ordenó enterrar el tesoro. De inmediato mandó recoger la espada y las estacas para, así, proteger la situación exacta del tesoro. Volvió al barco con su tripulación y siguió con sus fechorías hasta que pasaron diez años. Entonces volvió a la isla y desenterró el tesoro. ¿Cómo consiguió localizar el tesoro con la ayuda, únicamente, de la situación de la palmera y de la roca, que aún permanecían allí?

Problema 6 (OMA-2021) Sean $x, y \geq 0$ nḿeros reales verificando $x + y = 2$. Prueba que se verifica

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2.$$

Problema 7 (OMA-2021). Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que

$$p(2018)p(2019) = 2021.$$

Probar que no existe ningún entero k tal que $p(k) = 2020$.

Problema 8 (OMA-2022). Determina todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con $\mathbb{N}$ el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ de los núumeros naturales, que verifican:

$$\begin{array}{ll} (1) & f(n+2) - f(n) = 4n + 6, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \\ (2) & f(2022) - f(2021) = 4044. \end{array}$$

En cada caso, tienes que dar el valor de $f(n)$para cada $n \in \mathbb{N}$.

Problema 9 (OMA-2022). Un grupo de hombres y mujeres se sienta alrededor de una mesa circular (equidistante cada uno con sus dos vecinos). En total hay 2n hombres y 2n mujeres. Prueba que es posible trazar un diámetro de la mesa que divida el grupo en dos partes, con el mismo número de componentes, y que cada parte tenga el mismo núumero de hombres que de mujeres.