SESIÓN TEORÍA DE NÚMEROS

Antonio Medinilla, Adrián Macías, David Ramos y Laura García

18 noviembre 2022

Problema 1. Calcular el resto de la división de 2^{2011} entre 7.

Problema 2. Dado un número natural n, denotaremos por $s(n)$ a la suma de los dígitos de n (por ejemplo tenemos que $s(436) = 4 + 3 + 6 = 13$). Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$n + s(n) + s(s(n)) = 2023$$

Problema 3. Un número N, múltiplo de 83 , es tal que su cuadrado tiene 63 divisores. Hallar N, sabiendo que es el menor número que cumple las condiciones anteriores.

Problema 4. Probar que para todo entero positivo n la expresión decimal de

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

es periódica mixta.

Problema 5. Sean p y q números enteros tales que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \frac{p}{q}$$

Demostrar que p es divisible entre 1979.

Problema 6. Demuestra que para todo n natural se tiene:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Problema 7 [P4 IMO 2002]. Sea $n \geq 2$ un entero positivo con divisores $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$. Probar que $d_1 d_2 + d_2 d_3 + ... + d_{k-1} d_k$ es menor que n^2, y ver cuando es un divisor de n^2.

Problema 8 [Propuesta de Nigeria para IMO 2019]. Encontrar todas las ternas (a,b,c) de números enteros positivos tal que:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2$$

Problema 9 [P3, Local OME 2006]. ¿Existe un conjunto infinito de números naturales que **NO** se pueden representar de la forma $n^2 + p$ siendo n natural y p primo? Razone su respuesta.

Problema 10. Probar que todo primo p distinto de 2 y 5 divide a un número n formado solamente por "1"(en base 10). ¿Hay alguna relación entre p y el número de cifras de n?

Problema 11 [P5, Local OME, 2006]. Un número positivo x verifica la relación

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

Demostrar que

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

es un número entero y calcular el valor de dicha expresión.

Problema 12 [2014]. Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$x^4 + y^4 = 3x^3y$$

Problema 13. Pruebe que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es divisible entre 7.

Problema 14. Sea $n \geq 100$ un entero. Antonio escribe cada uno de los números $n, n + 1, ..., 2n$ en un naipe diferente. Después de barajar estos $n + 1$ naipes, los divide en dos pilas distintas. Probar que al menos una de esas pilas contiene dos naipes tales que la suma de sus números es un cuadrado perfecto.