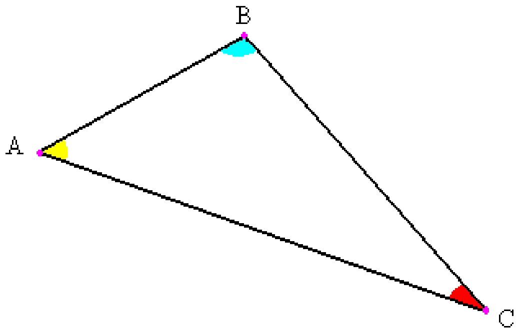
Taller básico de Geometría (18/11/22):

Resultados básicos de Geometría plana: se suponen conocidos las semejanzas de triángulos y el teorema de Thales:

Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales (AAA) o, equivalentemente, si sus lados son proporcionales entre sí (LLL).

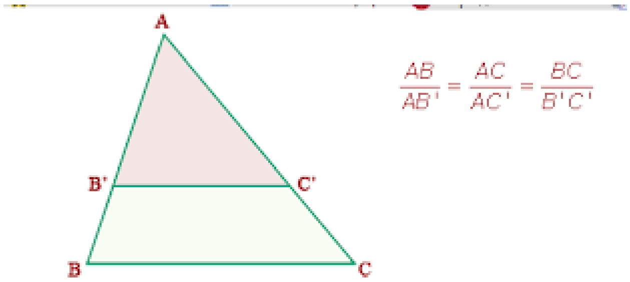


Criterios de semejanza:

LAL: son semejantes dos triángulos que tienen dos lados proporcionales y el mismo ángulo en común.

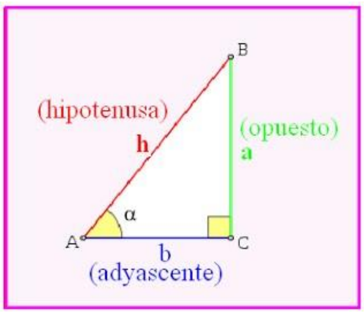
ALA: son semejantes dos triángulos que tienen dos ángulos iguales y el lado en común proporcionales; si dos ángulos son iguales el tercero también lo es.

El teorema de Tales afirma que, si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado. Es decir: $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$ si y sólo si BC es paralelo a $B'C'$.



Trigonometría básica: definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo. Propiedades básicas

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, del ángulo correspondiente al vértice A:



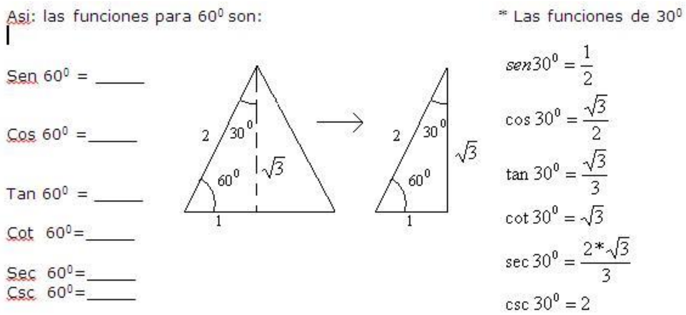
El seno (abreviado como *sen*, o *sin* por llamarse "sĭnus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

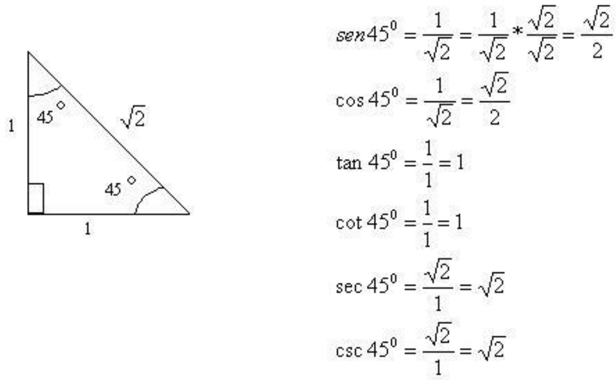
El coseno (abreviado como *cos*) es la razón entre el cateto adyacente o contiguo al ángulo y la hipotenusa.

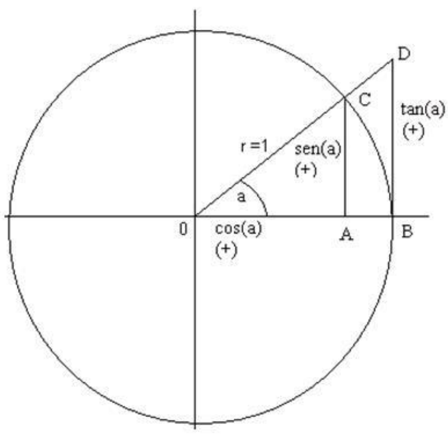
La tangente (abreviado como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente.

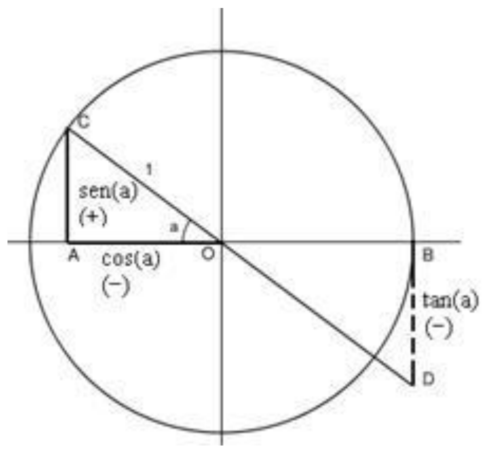
$$\sin A = \frac{a}{h},\ \cos A = \frac{b}{h},\ \tan A = \frac{a}{b}$$

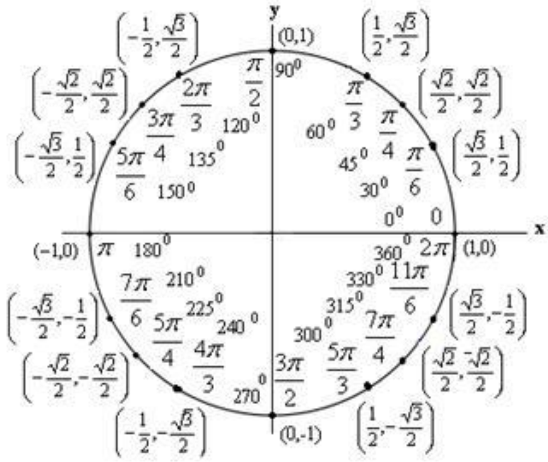
Del teorema de Pitágoras se obtiene que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, sin 45º = cos 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, sin 30º = cos 60º = ½, sin 60º = cos 30º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Razones trigonométricas de 90º, 120º, 135º, 150º, …









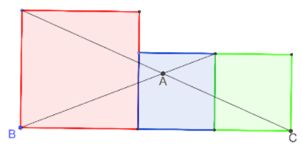


Si a es un ángulo entre 90º y 180º se definen sus razones trigonométricas: $\sin a = \sin(180 - a)$; $\cos a = -\cos(180 - a)$.
Si a es un ángulo del tercer cuadrante, se definen $\sin a = -\sin(a - 180)$; $\cos a = -\cos(a - 180)$.
Si a es un ángulo del cuarto cuadrante, se definen $\sin a = -\sin(360 - a)$; $\cos a = \cos(360 - a)$.
Se verifican diversas fórmulas para las razones trigonométricas de la suma (y resta de ángulos), por ejemplo:

$$\sin(a + b) = \sin a \ \cos b + \sin b \ \cos a\,;\ \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

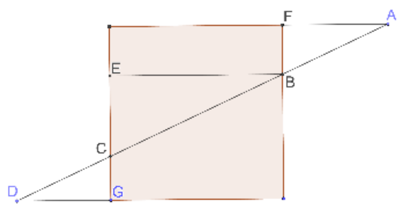
De aquí se pueden deducir las de la resta y las tangentes.

Problema CO+2021 de Bachillerato. *En la siguiente figura el cuadrado grande tiene lado a, y los cuadrados pequeños tienen el mismo lado b. Entonces el ángulo BAC mide 135º.*



Solución: En el triángulo ABC calcular las tangentes de los ángulos B y C. De ahí deducir la tangente de A.

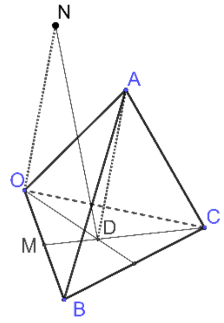
Problema CO+2022 de Bachillerato (retocado). *En la figura, los puntos A y D están sobre la prolongación de los lados opuestos del cuadrado. El segmento AD corta a los otros dos lados del cuadrado en los puntos B y C, tales que AB=a, CD=b y BC=a+b=5. Calcula el área del cuadrado.*



Solución. Llamamos *E* al pie de la perpendicular desde *B* al lado opuesto. Se tienen así tres triángulos semejantes: *ABF*, *BCE* y *CDG*. Como *BC=AB+CD*, también *EC=BF+CG*, por tanto *EC* es la mitad del lado del cuadrado, digamos *d*. Aplicando Pitágoras al triángulo *BCE*, se tiene que $25=5d^2/4$. De aquí, que el área del cuadrado es 20.

Problema Fase Nacional OME 2020 (nº 1). *Los vértices, A, B y C, de un triángulo equilátero de lado 1 están en la superficie de una esfera de radio 1 y centro O. Sea D la proyección ortogonal de A sobre el plano, α, determinado por B, C y O. Llamamos N a uno de los cortes con la esfera de la recta perpendicular a α por O. Halla la medida del ángulo $\widehat{DNO}$.*
(Nota: la proyección ortogonal de A sobre el plano α es el punto de corte con α de la recta que pasa por A y es perpendicular a α.)

Solución: Es obvio A, B, C y O son vértices de un tetraedro regular de arista igual a 1, puesto que la distancia entre dos cualesquiera de ellos es 1. Como D es la proyección ortogonal de A sobre la cara opuesta del tetraedro, D es el centro de la cara BCO.

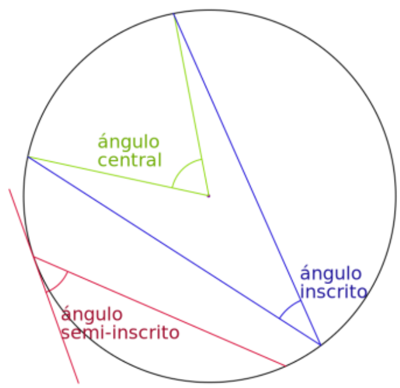


Si M es el punto medio del lado OB, los triángulos OMD y CMO son semejantes, por tanto, OD=DC es el doble de DM, Así pues, la distancia de D a O (distancia del centro de un triángulo equilátero de lado 1 a uno de sus vértices) es

$$OD = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

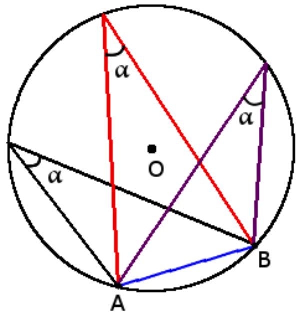
Como el triángulo DNO es rectángulo en O, y el cateto ON mide 1, el ángulo buscado es $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$ =30º.

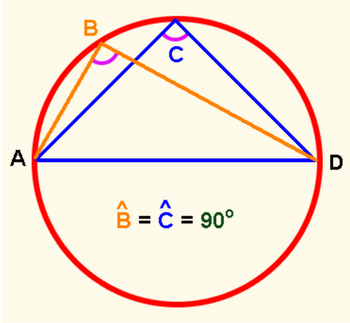
Teorema del ángulo inscrito (o semi-inscrito).- *Un ángulo inscrito (o semi-inscrito) en un círculo mide la mitad del arco que abarca (o ángulo central).*



Demostración: Hacer primero el caso particular de que uno de los lados pase por el centro de la circunferencia.

En consecuencia, todos los ángulos inscritos o semi-inscritos que comparten un mismo arco tienen la misma medida. El caso en que el arco que describe un ángulo inscrito es una semicircunferencia, corresponde al ángulo recto.





Para Pensar:

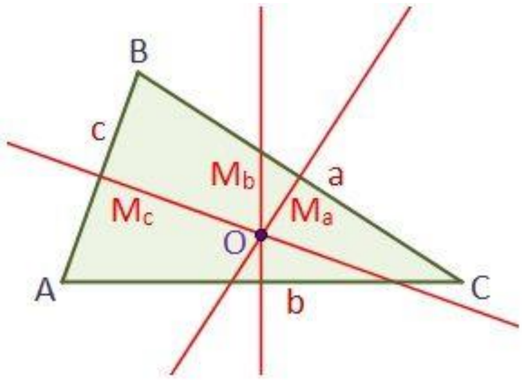
Teorema del ángulo interior. *Un ángulo interior en un círculo mide la semisuma de los dos arcos que abarca.*

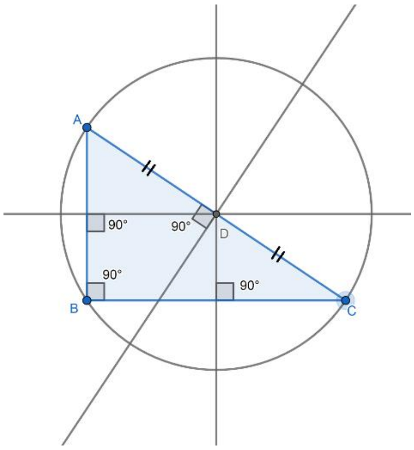
Teorema del ángulo exterior. *Un ángulo exterior de un círculo mide la semidiferencia de los dos arcos que abarca.*

Casos de ángulos tangentes.

Mediatriz de un triángulo. Es la mediatriz de cada uno de los lados (segmentos), es decir el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos vértices.

Existencia del circuncentro. El punto O de corte de dos mediatrices es un punto que equidista de los tres vértices. La circunferencia que tiene O como centro y que pasa por un vértice pasa también por los otros vértices y se llama la circunferencia circunscrita y O circuncentro del triángulo.





Caso del triángulo rectángulo. En un triángulo rectángulo el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa, que coincide con un diámetro de su circunferencia circunscrita.

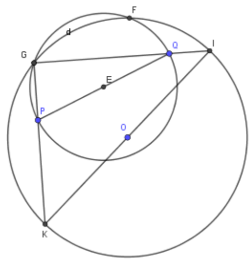
En un cuadrilátero cíclico (inscrito en una circunferencia), los ángulos opuestos suman 180º. El recíproco también es cierto.

Problema Fase Local OME 2022 (nº2/4) mañana. *Sea ABC un triángulo isósceles con ∠BAC = 100º. La bisectriz del ángulo ∠CBA corta al lado AC en el punto D. Probar que BD + DA = BC.*

Solución 1 (oficial). Sea *E* el único punto del segmento *BC* tal que *BD* = *BE*. Si establecemos que *AD* = *EC* el enunciado quedará probado. Para ello, veremos que *AD* = *DE* = *EC*. Comenzamos observando que *ADEB* es cíclico, puesto que ∠*BAD* + ∠*DEB* = 100º + 80º = 180º. Aquí hemos usado que *BD* = *BE* por construcción, y por tanto el triángulo *BDE* es isósceles con ∠*EBD* = 20º. De aquí tenemos que *ADE* es isósceles puesto que ∠*DEA* = ∠*DBA* = 20º y ∠*DAE* = ∠*DBE* = 20º. Por otro lado, ∠*DEC* = 100º, lo que muestra que *EDC* es isósceles con *ED* = *EC*, tal y como se quería.

Solución 2. Sea *F* el punto simétrico de *A* respecto de la recta *BD*. Entonces *F* está en *BC*, y los triángulos *ABD* y *FBD* son iguales, por tanto, *AD=DF* y el triángulo *CDF* tiene ángulos de 40º, 60º y 80º. Sea *G* el (único) punto de *BD*, fuera del segmento *BD*, tal que *DG=AD*. Entonces el triángulo *CDG* es igual que el *CDF* por el criterio LAL: *DG=DF=AD*, *CD* es común y el ángulo entre ambos es 60º. Nos fijamos ahora en el triángulo *CBG* que es isósceles por tener los ángulos en *C* y *G* iguales a 80º, luego *BC=BD+DG=BD+AD*, que es lo que se quería probar.

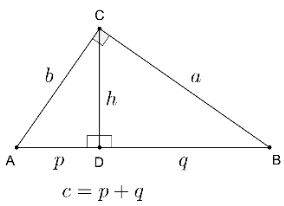
Problema Fase Local OME 2008 (nº 5). *Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, inscribir un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y Q respectivamente. ¿Para qué posiciones de P y Q el problema no tiene solución?*



Sea *E* es el punto medio de *PQ*, y *C'* la circunferencia de centro *E* y radio *PQ/2*. Sea *G* es un punto de corte de la circunferencia dada *C* y *C'*. Entonces *GP y GQ* son los catetos del triángulo rectángulo buscado. Si *O* el centro de la circunferencia *C* y *r* su radio, no existe solución si *OE +PQ/2 < r*.

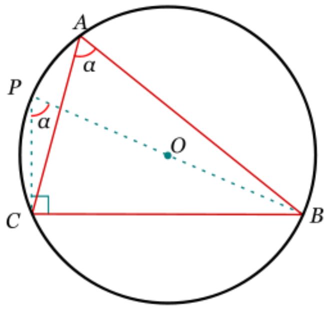
Teorema de la altura. *En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional con las partes en las que divide a ésta.*

Demostración por semejanza de triángulos. Los triángulos ACD y CBD son semejantes por igualdad de ángulos. Por tanto, AD/CD=CD/BD



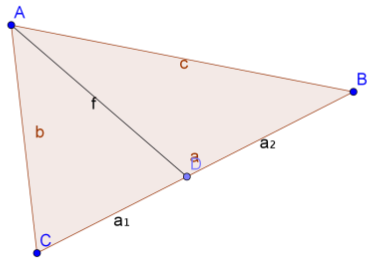
Teorema del Seno. *En todo triángulo ABC se verifica que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos correspondientes. La proporción es el diámetro de la circunferencia circunscrita*: $\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C} = 2R$

Demostración por el teorema del ángulo inscrito, el ángulo en P coincide con el ángulo en A



Teorema de la Bisectriz (interior). *La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados del ángulo:*

$$\frac{a_1}{b} = \frac{a_2}{c}$$

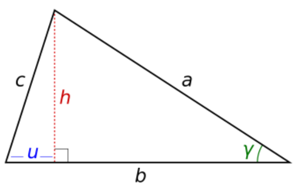


Demostración: aplicar el teorema del seno a los triángulos *ADC*, *ADB y ABC*:

$$\frac{a_1}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{f}{\sin C} \quad ; \quad \frac{a_2}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{f}{\sin B} \quad ; \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Teorema del Coseno. *En todo triángulo ABC de lados a, b, c se verifica que:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\hat{C}$$

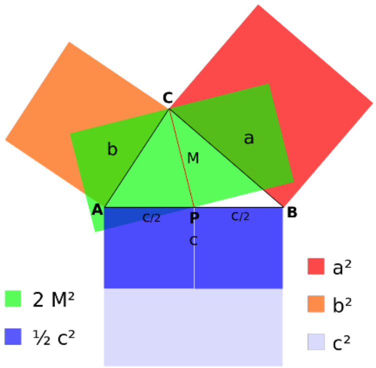


Demostración: aplicar el teorema de Pitágoras y la definición de coseno de *C*:

$$c^2 = u^2 + h^2 = u^2 + a^2 - (b-u)^2 = a^2 + b^2 - 2b(b-u) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$

Teorema de la Mediana (o de Apolonio). *En un triángulo ABC de lados a, b, c se traza la mediana desde C, de longitud M. Se verifica que:*

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2M^2$$



Demostración: Aplicar la fórmula del coseno a los ángulos que forma la mediana con el lado c y sumar.

Movimientos del plano. Homotecias.

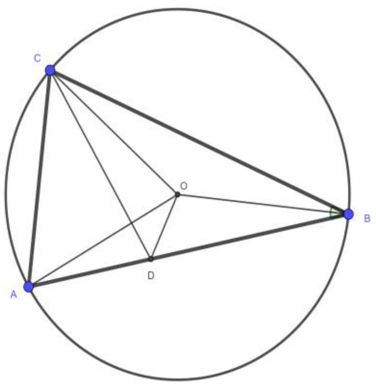
Recordar los tipos de movimientos: traslaciones, giros, simetrías y simetrías con deslizamiento, con sus elementos característicos. Recordar las homotecias, centro y razón.

Bisectrices (interiores) de un triángulo. Son las rectas que dividen el ángulo interior en dos ángulos iguales. La simetría de eje una bisectriz del triángulo transforma un lado en el otro.

Existencia del incentro. Todo punto de la bisectriz equidista de los dos lados que la definen. El punto de corte de dos bisectrices equidista de los tres lados, luego está en la tercera bisectriz.

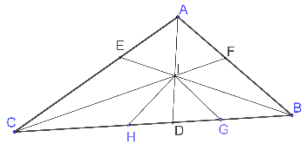
Problema nº 3 Fase local 2006. *En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC.*

Solución. Si el ángulo OBC mide α, también OBD es α, por ser OB la bisectriz. Por ser O el circuncentro, OCB y OAB son α; por ser OC una bisectriz, también OCD es α. Luego DCB es 2α; por CD una bisectriz, ACD es también 2α. OCA es 3α; por ser O circuncentro, OAC también es 3α. En suma, los ángulos del triángulo ABC miden 2α, 4α y 4α. Como la suma es 180º se concluye que los ángulos son 36º, 72º y 72º.



Problema Fase Local OME 2021 (nº 3 ampliado de 4). *En el triángulo ABC con lado mayor BC, las bisectrices se cortan en I. Las rectas AI, BI, CI cortan a BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Se consideran puntos G y H en los segmentos BD y CD, respectivamente, tales que ∠GID = ∠ABC y ∠HID = ∠ACB. Probar que ∠BHE = ∠CGF=∠CAB.*

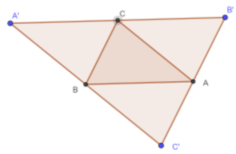
Solución. Comenzamos con una figura, donde se señalan algunas igualdades de ángulos que inmediatamente justificaremos



Nótese que los triángulos ABD y GID tienen un ángulo común en D y ángulos iguales en B y en I, por lo que sus terceros ángulos deben coincidir, es decir ∠DGI = ∠DAB. De forma análoga, razonando con los triángulos ACD y HID se obtiene ∠DHI = ∠DAC. Los triángulos BIA y BIH resultan ser congruentes por tener dos ángulos iguales y un lado común, esto revela que los puntos A y H son simétricos con respecto a la recta BI, y de forma similar A y G son simétricos respecto de CI. Las simetrías que acabamos de establecer prueban que: ∠BHE = BAE y ∠CGF = ∠CAF, y queda demostrada la igualdad de ángulos que se pedía.

Alturas de un triángulo. Son las rectas perpendiculares a un lado trazadas desde el vértice opuesto.

Existencia del ortocentro. Para demostrar que las tres alturas de un triángulo ABC son concurrentes en un punto, se trazan paralelas a los lados pasando por los vértices. Se construye así un nuevo triángulo A’B’C’



Como ABCB’, ABA’C, CBC’A, CBAB’, ACBC’ son paralelogramos, sus lados son iguales, luego A,B,C son los puntos medios de los lados de A’B’C’. Por tanto, las alturas de ABC son las mediatrices de A’B’C’ que se cortan en un punto, que se llama ortocentro de ABC.

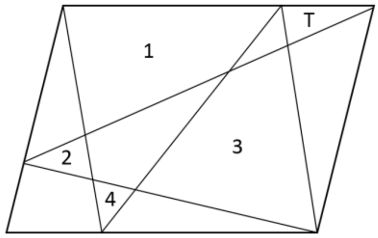
Existencia del baricentro. Se puede demostrar (usando propiedades de homotecias o de vectores) que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto, llamado baricentro, o centro de gravedad del triángulo.

Recta de Euler. Siguiendo con el razonamiento anterior se puede probar que el ortocentro, circuncentro y baricentro de un triángulo están alineados, la recta común se llama recta de Euler.

Fórmulas del área *S* de un triángulo, conocidos:

1. Base, *b*, y altura *h: S = ½ bh*

Problema CO+2022 de Bachillerato. *La parte exterior de la figura adjunta es un paralelogramo. Las líneas que unen lados del paralelogramo son rectas, formando 7 triángulos y 4 cuadriláteros. Las áreas del cuadrilátero 1, el triángulo 2, el cuadrilátero 3 y el triángulo 4 son, respectivamente, 72, 10, 79 y 8. ¿Cuál es el área del triángulo T?*



Solución. Con base en cada lado mayor del paralelogramo y vértice en el lado opuesto hay dos triángulos, cuya suma de áreas, por tanto, coinciden. De ahí se deduce una ecuación con las áreas de las partes en que se dividen. Con base en cada lado menor del paralelogramo hay un triángulo o dos, cuya suma de áreas coinciden. Del sistema de ecuaciones final se deduce que *T=9*.

Problema. *Demuestra que en un triángulo equilátero ABC, la suma de las distancias de cualquier punto interior P a los tres lados es independiente de P. Si Q no se encuentra en el interior de ABC, demuestra que la suma de distancias de Q a los tres lados es mayor o igual a aquella de P.*

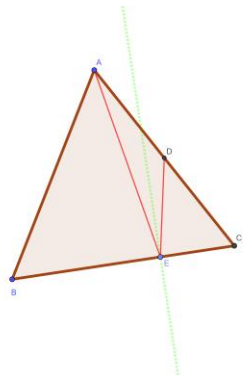
Solución. Sean *X, Y* y Z las proyecciones de *P* en *AB, BC* y *CA*, respectivamente. Entonces tenemos que

$PX+PY+PZ = 2\cdot$área$(ABP)/AB + 2\cdot$área$(BCP)/BC + 2\cdot$área$(CAP)/CA = 2\cdot$área$(ABC)/AB$,

que no depende de *P*. Si *Q* no está en el interior de *ABC* usamos el mismo cálculo con área(ABQ) + área(BCQ) + área(CAQ) ≥ área*(ABC).*

2. Dos lados *a,b* y el ángulo $\hat{C}$ que abarcan: $S=\frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$

Problema Fase Local OME 2019 (nº 3) (ligeramente adaptado). *Sea ABC un triángulo equilátero de lado 6. Un rayo de luz parte de A, rebota en el lado BC, en el punto E, y corta al lado AC en su punto medio D. Calcular el área del triángulo ADE*



El criterio de semejanza ALA nos permite afirmar que los triángulos ABE y DCE son semejantes, y la razón de semejanza es ½, ya que el ángulo en E de ambos triángulos es el mismo por la propiedad de reflexión de la luz; el ángulo en B del primero y en C del segundo es 60º, y AB=2DC. Por tanto el área del primero es 4 veces el área del segundo, y BE=2EC. Por tanto EC=2, BE=4, CD=3. Si aplicamos la fórmula 2 del área, tenemos que el área de los triángulos ABC, ABE y DCE es, respectivamente, $9\sqrt{3},\ 6\sqrt{3},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}$. El cálculo restante ya es trivial.

3. Lados *a,b,c* (fórmula de Herón). Si *p=(a+b+c)/2*, y *R* es el circunradio:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$$

4. Semiperímetro e inradio *r*: $S = pr$

Problema Fase Local OME 2019 (nº 4) (ligeramente adaptado). *Sea $p \geq 3$ un número entero y consideremos el triángulo rectángulo de cateto mayor p^2-1 y cateto menor 2p. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor y es tangente a la hipotenusa. Calcule el radio r del semicírculo, en función de p. Determine los valores de p para los que r es también entero.*

5. Coordenadas de los vértices (a_1,a_2), (b_1,b_2), (c_1,c_2),

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Problema 2/4 OMA 2022. *Sea ABC un triángulo isósceles, con AB = AC. Sea P un punto cualquiera del segmento BC, no en los extremos, y N el punto medio de AP. Se construye el trapecio (convexo) $M_1M_2N_2N_1$ con: M_1 punto medio de BP, M_2 punto medio de PC, M_1N_1 y M_2N_2 perpendiculares a BC, tales que N, N_1 y N_2 están alineados. Demostrar que el área del trapecio es la mitad del área del triángulo dado.*

Solución 1 El triángulo NM_1M_2 es el homotético del *ABC* con la homotecia de centro *P* y razón ½, por tanto también es isósceles. Además $M_1M_2 = BC/2$, y si *E* es el pie de la perpendicular desde *N* a *BC*, entonces, *E* es punto medio de M_1M_2. Por tanto, el área del trapecio $M_1M_2N_2N_1$ es $NE \cdot M_1M_2= (AD/2)(BC/2)$ que es la mitad del área del triángulo dado.

Solución 2. Tomando un sistema de referencia en el que *BC* es el eje de abcisas y *D* el origen de coordenadas, se tiene: $A = (0, a)$, $B = (-b, 0)$, $C = (b, 0)$, $P = (c, 0)$ Entonces $N = (c/2, a/2)$, $M_1= ((c - b)/2 , 0)$, $M_2 = ((c + b)/2 , 0)$, $N_1 = ((c - b)/2 , x)$, $N_2 = ((c + b)/2 , y)$. La exigencia de que *N*, N_1 y N_2 estén alineados se corresponde a que $0= 4(a - x - y)$. Por tanto, la condición equivale a que $x + y = a$. Si *T* y *S* son las áreas del trapecio y del triángulo, respectivamente: $T = (x + y)/2\cdot M_1M_2 = ab/2$, $S = ab$.