(2005) Sean *a* y *b* enteros. Demostrar que la ecuación (x-a)(x-b)(x-3)+1=0 admite a lo sumo una solución entera.

(2006) Sea P(x) un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que si existe un entero k tal que ninguno de los enteros P(1),P(2),…,P(k) es divisible por *k*, entonces P(x) no tiene raíces enteras.

(2006) Probar que el producto de cuatro naturales consecutivos no puede ser ni cuadrado ni cubo perfecto

(2007) Determinar todos los posibles valores enteros no negativos que puede tomar la expresión $\frac{m^2+mn+n^2}{mn-1}$, **siendo** m **y** n **enteros no negativos tales que** $mn\neq 1$.

(2008) Sean p y q dos números primos positivos diferentes. Prueba que existen enteros positivos a y b, tales que la media aritmética de todos los divisores positivos del número $n = p^a q^b$ es un número entero.

(2008) Halla dos enteros positivos a y b conociendo su suma y su mínimo común múltiplo. Aplícalo en el caso de que la suma sea 3972 y el mínimo común múltiplo 985928.

(2009) Halla todas las sucesiones finitas de n números naturales consecutivos a_1, a_2,..., a_n, con $n \geq 3$, tales que $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2009$.

(2009) Determina justificadamente todos los pares de números enteros (x, y) que verifican la ecuación $x^2 - y^4 = 2009$.

(2010) Una sucesión pucelana es una sucesión creciente de dieciséis números impares positivos consecutivos, cuya suma es un cubo perfecto. ¿Cuántas sucesiones pucelanas tienen solamente números de tres cifras?

(2012) Hallar todos los números enteros positivos n y k, tales que $(n + 1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

(2012) Determinar razonadamente si el número $\sqrt{3n^2+2n+2}$ es irracional para todo entero no negativo n.

(2013) ¿Existen infinitos enteros positivos que no pueden representarse de la forma $a^3 + b^5 + c^7 + d^9 + e^{11}$, donde a, b, c, d, e son enteros positivos?

(2014) Dados los números racionales r, q y n, tales que $\frac{1}{r+qn}+\frac{1}{q+rn}=\frac{1}{r+q}$ **probar que** $\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}$ **es un número racional.**

(2015) Sean p y n enteros positivos, tales que p es primo, n≥p, y 1+np es un cuadrado perfecto. Probar que n+1 es suma de p cuadrados perfectos no nulos.

(2015) Sobre la gráfica de una función polinómica con coeficientes enteros, se eligen dos puntos con coordenadas enteras. Probar que si la distancia entre ellos es un número entero, entonces el segmento que los une es paralelo al eje de abscisas.

(2016) Se tienen dos progresiones de números reales, una aritmética $(a_n)_{n\in N}$ y otra geométrica $(g_n)_{n\in N}$ no constante. Se cumple que $a_1 = g_1 =/= 0$, $a_2 = g_2$ y $a_{10} = g_3$. Decidir, razonadamente, si para cada entero positivo p, existe un entero positivo m, tal que $g_p = a_m$.

(2016) Sea p un número primo positivo dado. Demostrar que existe un entero α tal que $\alpha(\alpha - 1) + 3$ es divisible por p si y sólo si existe un entero β tal que $\beta(\beta - 1) + 25$ es divisible por p.

(2016) Sean $m \geq 1$ un entero positivo, a y b enteros positivos distintos mayores estrictamente que m^2 y menores estrictamente que $m^2 + m$. Hallar todos los enteros d, que dividen al producto ab y cumplen $m^2 < d < m^2 + m$.

(2017)

Sea p un primo impar y $S_q = \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6\cdot7} + \cdots + \frac{1}{q(q+1)(q+2)}$, donde $q = \frac{3p-5}{2}$. Escribimos $\frac{1}{p} - 2S_q$ en la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros. Demuestra que $m \equiv n \pmod{p}$; es decir, m y n dan el mismo resto al ser divididos por p.

(2018) Determina todos los enteros positivos x tales que $2x+1$ sea un cuadrado perfecto, pero entre los números $2x+2, 2x+3,\ldots, 3x+2$ no haya ningún cuadrado perfecto.

(2019) Determinar si existe un conjunto finito S formado por números primos positivos de manera que para cada entero $n\geq2$, el número $2^2+3^2+\ldots+n^2$ sea múltiplo de algún elemento de S.

(2019) Calcular todos los pares de enteros (x,y) tales que $3^4 2^3(x^2+y^2)=x^3y^3$.

(2021) Dado un número entero positivo n, definimos λ(n) como el número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x^2-y^2=n$. Diremos que el número n es “olímpico” si λ(n)=2021. ¿Cuál es el menor entero positivo que es olímpico? ¿Y cuál es el menor entero positivo impar que es olímpico?