1. Ecuaciones funcionales

Jose Luis Mesa y Clara Briand

1. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ tales que

$$2f(\frac{1}{x}) + f(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

2. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que

$$f(x + f(y)) = f(x) - y \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

3. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$$

4. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tales que

$$\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{f^i(n)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

   donde $f^i(n)$ es $(f \circ ... \circ f)(n)$ (i veces).

5. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + y) + f(x^4) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

6. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(yf(x + y) + f(x)) = 4x + 2yf(x + y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

7. Una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ cumple las siguientes propiedades:

   - $f(1) = 1$
   - $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$
   - $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ siempre que $x, y, x + y \in [0, 1]$

   Demostrar que $f(x) \leq 2x$ para todo $x \in [0, 1]$. ¿Es cierto que $f(x) \leq 1,9x$ para todo $x \in [0, 1]$?

8. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)cos(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

9. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) - f(y)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

10. Sea $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tal que

    - $f(1) = 1$
    - $f(3) = 3$
    - $f(2n) = f(n)$
    - $f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n)$
    - $f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n)$

    Encontrar todos enteros positivos $n \leq 1988$ tales que $f(n) = n$.