Clase CO+

J.Ojeda, J.Ribelles, C.Zuleta

Febrero 2023

1 Introducción

Ejercicio 0. ¿Se puede cubrir un tablero de ajedrez sin dos esquinas opuestas con fichas de dominó?

Ejercicio 1. Puzzle MU: Gödel, Escher, Bach: un Eterno y Grácil Bucle Las letras M, I, U se pueden combinar para crear cadenas de símbolos. Comenzando por la cadena "MI", ¿se puede obtener la cadena "MU" siguiendo las siguientes reglas?
1. xI → xIU: Se puede añadir una U al final de una cadena terminada en I.
2. Mx → Mxx: Se puede duplicar la cadena después de M.
3. xIIIy → xUy: Se puede reemplazar III por U.
4. xUUy → xy: Se puede eliminar UU.

Ejercicio 2. OME Local 2022-2023 (2) Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Los primeros n enteros positivos, 1, 2, . . . , n, se escriben en una pizarra. María realiza el siguiente proceso tantas veces como quiera: primero elige dos números en la pizarra, y luego los reemplaza con aquellos que resultan de sumarle a ambos un mismo entero positivo. Determinar todos los enteros positivos n para los que María puede conseguir, repitiendo este proceso, que todos los números de la pizarra sean iguales.

Ejercicio 3. OME Local 2022-2023 (5) Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número

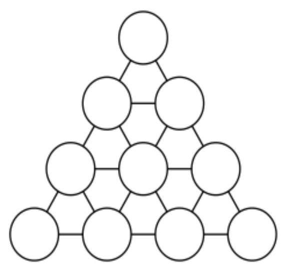
$$\frac{xy}{xy + (1 - x)(1 - y)}$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

2 Problemas

Ejercicio 4. Barcelona Math Contest 2020-2021 (1) Los primeros 2021 enteros positivos 1, 2, ... 2021 se escriben en una pizarra. Cada turno se eligen dos al azar a y b, y se sustituyen aletaoriamente por a + 8b o por a - 6b. ¿Puede obtenerse como único número tras realizar este proceso 2020 veces el propio 2021?

Ejercicio 5. OME 1999 (3) Sobre un tablero en forma de triángulo equilátero como se indica en la figura de abajo se juega un solitario. Sobre cada casilla se coloca una ficha. Cada ficha es blanca por un lado, y negra por el otro. Inicialmente, sólo una ficha, que está situada en un vértice, tiene la cara negra hacia arriba; el resto de las fichas tiene la cara blanca hacia arriba. En cada movimiento se retira sólo una ficha negra del tablero y se da la vuelta a cada una de las fichas que ocupan una casilla vecina. Casillas vecinas son las que están unidas por un segmento. Después de varios movimientos ¿será posible quitar todas las fichas del tablero?



Ejercicio 6. OME Local 2010 (1) Sea I_n el conjunto de los n primeros números naturales impares. (Por ejemplo: $I_3 = \{1, 3, 5\}$, $I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, etc.) ¿Para qué números n el conjunto I_n se puede descomponer en dos partes (disjuntas) de forma que coincidan las sumas de los números en cada una de ellas?

Ejercicio 7. OME Nacional 2000-2001 (4) Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla 3x3. Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas de izquierda a derecha y los tres que se leen en columnas de arriba abajo. ¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea 2001?

Ejercicio 8. OME Nacional 2003-2004 (1) Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas y la primera y última columnas son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004

Ejercicio 9. Juego del 15 Tenemos una caja con 15 fichas cuadradas enumeradas y ordenadas en orden creciente, de tal forma que la esquina inferior derecha esté vacía. Probar si es posible obtener la misma configuración, pero con el 14 y el 15 intercambiados de lugar, deslizando las piezas.

Ejercicio 10. Dada una terna (a,b,c) se define *movimiento* como la sustitución de dos términos cualesquiera (ya sean a y b, b y c, o a y c) por $ra + \sqrt{1-r^2}b$ y $rb - \sqrt{1-r^2}a$, donde r es elegido en cada turno por el jugador siempre que $0 \leq r \leq 1$. ¿Puede llegarse de la terna (3,4,12) a la (4,6,12)?

Ejercicio 11. Nordic Mathematical Contest 2014 (4) (editado) El juego oficial de Steel Samurai se juega en un tablero de ajedrez n x n. Al comienzo hay 99 piedras en cada cuadro. Dos jugadores, Phoenix y Miles, se turnan para escoger una columna o fila y tomar una piedra de los cuadrados de aquella escogida. Solo tienen permitido escoger una fila o columna si esta tiene en cada cuadrado al menos una piedra. El primer jugador que no pueda hacer un movimiento pierde. Si Phoenix juega primero ¿Para que n tiene Phoenix una estrategia ganadora?

Ejercicio 12. OME Nacional 2003-2004 (6) Colocamos, formando una circunferencia, 2004 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha con la cara negra hacia arriba, y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviéramos 2003 fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba?

Ejercicio 12 + 1. OME 2022 (4) Sea P un punto en el plano. Demuesta que es posible trazar tres semirrectas con origen en P con la siguiente propiedad: para toda circunferencia de radio r que contiene a P en su interior P_1, P_2 y P_3 son los puntos de cortes de las semirrectas con la circunferencia, entonces

$$|PP_1| + |PP_2| + |PP_3| \leq 3r$$

Ejercicio 14. IMO 1974-1975 (4) Sea A la suma de los digitos de 4444^{4444} (número decimal). Sea B la suma de los digitos de A. Encuentra la suma de los digitos de B. (A y B números decimales.)