Preparación Olimpiada Matemática
Curso 2022/23
Problemas de desigualdades

6 de marzo de 2023

1. (Finnish High School Mathematics Contest School Year 2014 - 2015) Muestra si existen o no números reales a y b satisfaciendo la siguientes relaciones:

   a) $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geq \sqrt{ab}$.

   b) $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} > \sqrt{ab}$.

   c) $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \sqrt{ab}$.

   d) $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab}$.

2. Sean a, b y c números reales mayores que cero tales que $abc \leq 1$. Probar que
$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geq a+b+c.$$

3. (Finnish High School Mathematics Contest School Year 2014 - 2015) Sabiendo que x e y son dos números reales tales que
$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1,$$
determina el valor de $x+y$.

4. (1982 Moscow Math Olympiad) Utiliza la identidad $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{2}$ para probar que, para cualquier colección de números naturales distintos $a_1, \ldots, a_n$, se tiene:
$$(a_1^7+a_2^7+\cdots+a_n^7)+(a_1^5+a_2^5+\cdots+a_n^5) \geq 2(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3)^2.$$

5. (1994 Chinese Team Selection Test) Para $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$ y $a+b+c+d+e = 1$, probar que
$$ad+dc+cb+be+ea \leq \frac{1}{5}.$$

6. Para cualesquiera tres funciones $f, g, h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, prueba que hay números $x, y, z \in [0,1]$ tales que
$$|f(x) + g(y) + h(z) - xyz| \geq \frac{1}{3}.$$

7. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números naturales distintos, probar que
$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{8} + \cdots + \frac{a_n}{n2^n} \geq 1 - \frac{1}{2^n}.$$

8. Probar que si $a, b, c > 0$ entonces
$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$