Batalla matemática

1. En una fila hay n personas. Encuentra todas las formas de las que se pueden reordenar si cada persona no puede moverse más de una posición.

2. El lado BC del triángulo ABC se extiende por C hasta el punto D de forma que $CD = BC$. El lado CA se extiende por A hasta el punto E de forma que $AE = 2CA$. Prueba que si $AD = BE$, entonces el triángulo es rectángulo.

3. Sea I el incentro del triángulo ABC. La circunferencia que pasa por I y tiene centro A interseca a la circccunferencia circunscrita en los puntos M y N. Prueba que el segmento NM es tangente a la circunferencia inscrita al triángulo ABC.

4. Determina todos los pares de enteros que satisfacen la ecuación:
$$x^2 - y^4 = 2009.$$

5. Encuentra todos los n enteros positivos tales que $2011^n + 2^n + 12^n$ es un cuadrado perfecto.

6. Las cuatro patas de una mesa cuadrada, L_1, L_2, L_3 y L_4, tienen la misma logitud n. Determina las posibles tuplas ordenadas de cuatro enteros no negativos (k_1, k_2, k_3, k_4) tales que al cortar un trozo de longitud k_i de L_i para cada i la mesa sigue siendo estable. (La mesa es estable si las cuatro patas tocan el suelo al mismo tiempo. Es posible cortar un trozo de longitud 0)

7. Sean, $n, k \geq 2$ enteros positivos y $a_1, \ldots, a_k$ enteros positivos distintos en el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ tales que n divide $a_i(a_{i+1} - 1)$ para todo $i = 1, \ldots, k-1$, demuestra que n no divide a $a_k(a_1 - 1)$.