LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023

Mañana del viernes 20 de enero de 2023

Primera sesión

Problema 1. Sea n un entero positivo. Cada uno de los números $1, 2, 3, \ldots, 2023$ se pinta de un color a escoger entre n distintos. Una vez coloreados, se observa que cualquier par (a, b), con $a < b$ y de manera que $a \mid b$, satisface que a y b son de distinto color. Encontrar el menor valor de n para el cuál esta situación es posible.

Problema 2. Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Los primeros n enteros positivos, $1, 2, \ldots, n$, se escriben en una pizarra. María realiza el siguiente proceso tantas veces como quiera: primero elige dos números en la pizarra, y luego los reemplaza con aquellos que resultan de sumarle a ambos un mismo entero positivo. Determinar todos los enteros positivos n para los que María puede conseguir, repitiendo este proceso, que todos los números de la pizarra sean iguales.

Problema 3. Decimos que una terna de números reales (a, b, c), todos distintos de cero, es *local* si

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2 \\ b^2 + b &= c^2 \\ c^2 + c &= a^2. \end{aligned}$$

(a) Probar que si (a, b, c) es local, entonces $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

(b) Sea $A_1A_2 \ldots A_9$ un eneágono regular (polígono regular de 9 lados). Supongamos que $|A_1A_4| = 1$, y sea $|A_1A_2| = a$, $|A_1A_3| = b$ y $|A_1A_5| = c$.
Probar que $(a, b, -c)$ es local.

LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023

Tarde del viernes 20 de enero de 2023

Segunda sesión

Problema 4. Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Una circunferencia Γ que pasa por el punto A corta a los lados AB y AD por segunda vez en los puntos E y F, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto G. La prolongación de la recta FG corta al lado BC en H, y la prolongación de EG corta al lado CD en I. Demostrar que la recta HI es paralela a EF.

Problema 5. Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Problema 6. Encontrar todos los enteros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfacen

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$

LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023

Tarde del viernes 20 de enero de 2023

Primera sesión

Problema 1. Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Una circunferencia Γ que pasa por el punto A corta a los lados AB y AD por segunda vez en los puntos E y F, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto G. La prolongación de la recta FG corta al lado BC en H, y la prolongación de EG corta al lado CD en I. Demostrar que la recta HI es paralela a EF.

Problema 2. Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Problema 3. Encontrar todos los enteros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfacen

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$

LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023

Mañana del sábado 21 de enero de 2023

Segunda sesión

Problema 4. Sea $n \geq 2$ un entero positivo. Dividimos un rectángulo de $n \times (n+1)$ en piezas rectangulares: dos de 1×1, dos de 1×2, ..., y dos de $1 \times n$, con la propiedad de que para cada $k \geq 2$, una pieza de $1 \times k$ tiene los lados largos horizontales y la otra verticales. Demostrar que las dos piezas de 1×1 comparten un lado.

Problema 5. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + f(y + f(x + f(y + f(x))))) = 3x + 2y$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 6. Sean ABC y XYZ dos triángulos cuyos lados no son paralelos. En ambos triángulos el orden de los vértices A, B, C y X, Y, Z sigue el orden de las agujas del reloj. Si se cumple que $\dfrac{AB}{XY} = \dfrac{BC}{YZ} = \dfrac{CA}{ZX}$ y $AX = BY = CZ$, demostrar que los triángulos ABC y XYZ tienen el mismo circuncentro.