Teoría de números

Alfredo Almazán, Miguel Antequera y Pablo Hernández

10 noviembre 2023

Problema 1. IMO 1959 P1 Demostrar que

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

es irreducible para cualquier entero n.

Problema 2. Liga Matemática Dados 5 enteros demostrar que la suma o resta de dos de ellos siempre es múltiplo de 6.

Problema 3. Liga Matemática Demuestre que si $2^n + 1$ es un número primo, con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ entonces n es una potencia de dos.

Problema 4. OME Local 2004 P9 Hallar todas las formas de expresar 2003 como la suma de los cuadrados de dos números enteros.

Problema 5. Probar que si p es un primo positivo que se expresa como suma de los cubos de dos enteros, entonces $p = 2$ o bien $p = 3n^2 - 3n + 1$ para algún entero n.

Problema 6. Olimpiada Iberoamericana 1990 P3 Sea $f(x) = (x + b)^2 - c$ un polinomio con b y c números enteros:

(i) Si p es un número primo que divide a c y p^2 no divide a c, demostrar que p^2 no divide a $f(n)$ para ningún entero n.

(ii) Sea q un número primo distinto de 2 que no divide a c. Si q divide a $f(n)$ para algún entero n, demostrar que para cada entero positivo r existe un entero n' tal que q^r divide a $f(n')$.

Problema 7. OME Local 2023 P6 Encontrar todos los enteros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfacen

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$

Problema 8. ¿Cuál es la última cifra distinta de 0 en 100! ?

Problema 9. Sean $a, p, n \in \mathbb{N}$ enteros positivos con p primo. Demostrar que si $2^p + 3^p = a^n$, entonces $n = 1$.

Problema 10. Encontrar todos los enteros no negativos a y b que satisfacen la ecuación

$$3 \cdot 2^a + 1 = b^2$$

Problema 11. OMA 2023 P2 Determinar todos los números enteros positivos primos p, q, r, que verifican: $p + q + r = 2023$ y $pqr + 1$ es un cuadrado perfecto.

Problema 12. Olimpiada Británica 2005 P1 Sea N un entero positivo tal que existen exactamente 2005 pares ordenados (x, y) de números enteros positivos que satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N}.$$

Demostrar que N es un cuadrado perfecto.

Problema 13. IMO 2002 P4 Consideremos $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ los divisores positivos de un número natural n, de forma que $d_1 = 1$ y $d_k = n$, y sea

$$d = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k$$

Demostrar que $d < n^2$ y hallar todos los valores de n para los que d divide a n^2.

Problema 14. OME 2023 P3 Hallar todas las cuaternas (a, b, c, d) de números enteros positivos que cumplen que

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

y de manera que $ac + bd$ es divisor de $a^2 + b^2$.

Problema 15. IMO 1988 P6 Sean a y b enteros positivos tales que $ab + 1$ divide a $a^2 + b^2$. Demostrar que

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

es un cuadrado perfecto.

Problema 16. IMO 2023 P1 Determinar todos los $n > 1$ enteros compuestos que satisfacen la siguiente propiedad: si $d_1, d_2, \ldots, d_k$ son todos los divisores positivos de n con $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, entonces d_i divide a $d_{i+1} + d_{i+2}$ para todo $1 \leq i \leq k - 2$.