Sesión de Preparación de Olimpiada Matemática.

12 de Enero de 2024. Fernando Mayoral. mayoral@us.es

Desigualdades (y Polinomios y otras funciones).

1.-Algunas desigualdades básicas.

1) $x^2 \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. La igualdad sólo se cumple para $x = 0$.

2) (Desigualdad triangular) Hace referencia a la relación entre los lados de un triángulo. Si A, B y C son tres puntos (de una recta, de un plano o del espacio triddimensional), se verifica que

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C).$$

La igualdad se cumple si, y sólo si, C esta en el segmento determinado por A y B.

En el caso de ua recta: si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $|x + y| \leq |x| + |y|$. La igualdad se cumple si, y sólo si, $xy \geq 0$.

3) Medias: aritmética (A), geométrica (G), armónica (H) y cuadrática (Q): Si $a, b > 0$,

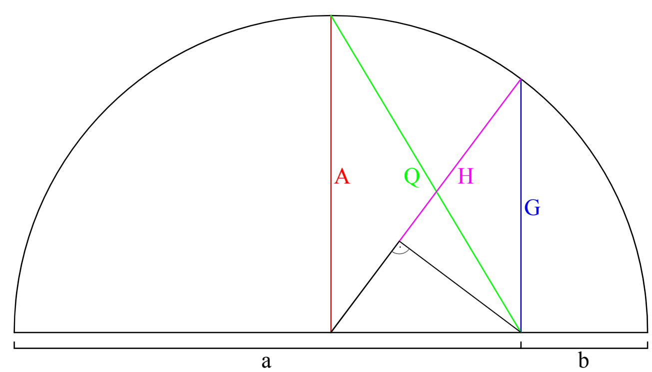
$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) = \sqrt{ab}, \quad H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad Q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Entonces

$$\boxed{\min\{a,b\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max\{a,b\}}$$

y las igualdades se cumplen si y sólo si $a = b$.

Las desigualdades entre las medias tienen la visualización adjunta. Dicha visualización también muestra cuánto se parecen y cuánto se diferencian en función de lo parecidos o diferentes que sean a y b.



Todas las desigualdades involucradas en $H \leq G \leq A \leq Q$ son equivalentes entre sí y equivalentes a la desigualdad $(a-b)^2 \geq 0 \;\equiv\; 2ab \leq a^2 + b^2$ (y que la igualdad se cumple sólo, y exclusivamente, para $a = b$). También puede considerarse una interpretación geométrica en términos de áreas y perímetros de rectángulos.

- puesto que ab es el área de un rectágulo de lados a y b (perímetro $= 2(a+b)$) y $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ es el área del cuadrado que tiene dicho perímetro (lado $= \frac{a+b}{2}$), la desigualdad

$$H \leq A \;\equiv\; \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} \;\equiv\; ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

nos dice que el área del rectágulo es menor o igual que la del cuadrado del mismo perímetro. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a = b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene mayor área es el cuadrado.*

- Puesto que $2(a + b)$ es el perímetro de un rectángulo de lados a y b (área $= ab$) y el perímetro del cuadrado que tiene área ab (lado $= \sqrt{ab}$) es $4\sqrt{ab}$ la desigualdad

$$G \leq A \;\equiv\; \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \;\equiv\; 4\sqrt{ab} \leq 2(a+b),$$

nos dice que el perímetro del del rectángulo es menor o igual que la cuadrado del mismo área. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a = b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un área dada, el que tiene menor perímetro es el cuadrado.*

4) (Reordenamiento) Si $a \leq b$ y $x \leq y$, entonces $\boxed{ay + bx \leq ax + by.}$

Ejercicio 1.

a) Demuestra la desigualdad triangular y que $|x - y| \geq ||x| - |y||$ para $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Demuestra la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Interpreta geométricamente la desigualdad en términos de áreas. ¿Cuándo se verifica la igualdad?

c) Demuestra e interpreta la desigualdad del reordenamiento.

Ejercicio 2. *(Completando cuadrados)* Demuestra las siguientes desigualdades:

a) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.

b) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

c) Si $x > 0$ entonces $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$. Demuestra que la suma $x + y$ con $xy = 1, x > 0$, es mínima cuando $x = y = 1$. Interpreta geométricamente el resultado.

d) Si $0 < x < 2$ entonces $x(2 - x) \leq 1$. Demuestra que el producto xy con $x + y = 2, x, y > 0$, es máximo cuando $x = y = 1$. Intepreta geométricamente el resultado.

Ejercicio 3. *(OME,1976-77, Completando cuadrados)* Se dan los números $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Demostrat, sin necesidad de calcular derivadas, que el valor de X que hace mínima la suma

$$(X - A_1)^2 + (X - A_2)^2 + \cdots + (X - A_n)^2$$

es precisamente la media aritmética de los números dados.

Ejercicio 4. *(OME,1975-76, Parábolas)* El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demostrar querompiéndolo en dos partes existe una depreciación de su valor. ¿Cuándo es máxima la depreciación?

Ejercicio 5. Demuestra las siguientes desigualdades:

a) Si $0 \le x \le y \le 1$ entonces $0 \le xy^2 - x^2y \le \frac{1}{4}$.

b) Si $x, y > 0$ entonces $\sqrt{\dfrac{x^2}{y}} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x}} \ge \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Ejercicio 6. *(OMA-2021, $G \le A$)*
Sean $x, y \ge 0$ números reales verificando $x + y = 2$. Prueba que se verifica

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \le 2.$$

. . . .

- (media geométrica $\le$ media aritmética): $xy \le \left[\dfrac{x+y}{2}\right]^2 = 1$,
- $x^2 + y^2$ es el cuadrado de la distancia de (x, y) al origen de coordenadas,

$$d((1,1),(0,0))^2 = 2 \le x^2 + y^2 \le d((2,0),(0,0))^2 = 4.$$

$$\begin{aligned} 2xy &= (x+y)^2 - x^2 - y^2 = 4 - (x^2+y^2), \\ x^2y^2(x^2+y^2) &= \frac{1}{4}\left(4 - (x^2+y^2)\right)^2 (x^2+y^2). \end{aligned}$$

Llamamos $t = x^2 + y^2, 2 \le t \le 4$,

$$\begin{aligned} x^2y^2(x^2+y^2) = \;& \frac{1}{4}\left(4 - (x^2+y^2)\right)^2 (x^2+y^2) = \frac{1}{4}(4-t)^2\, t = \frac{1}{4}(4-t)(4-t)t \\ \le \;& \left[\begin{array}{c} \text{aplicando} \\ G \le A \end{array}\right] \le \frac{1}{4}(4-t)\left(\frac{4-t+t}{2}\right)^2 = 4 - t \le 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Ejercicio 7. *(Reducir a una variable, factorizar)* Si a y b son números reales positivos, prueba que se verifica que

$$a^3 + b^3 \ge ab(a+b).$$
