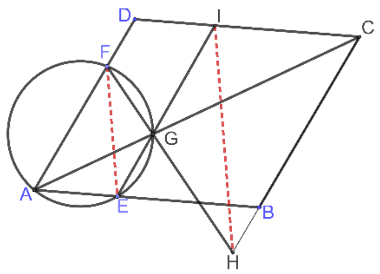
Taller básico de Geometría (15/12/23):

Problema nº 1, Fase Local 2023. *Consideremos un paralelogramo ABCD. Una circunferencia Γ que pasa por el punto A corta a los lados AB y AD por segunda vez en los puntos E y F, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto G. La prolongación de la recta F G corta al lado BC en H, y la prolongación de EG corta al lado CD en I. Demostrar que la recta HI es paralela a EF.*

Solución.



Demostraremos que $\angle GHI = \angle GFE$, que es suficiente para concluir. Comenzamos observando que $\angle GFE = \angle GAE = \angle GCI$, donde la primera igualdad de sigue del hecho que AFGE es un cuadrilátero cíclico y la segunda del paralelismo de AE y CI. Si demostramos que GHCI es cíclico, tendremos automáticamente que $\angle GCI = \angle GHI$. Ahora bien, esto es consecuencia de las igualdades $\angle HGI = \angle EGF = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD$, que son automáticas dado que AFGE es cíclico y ABCD es un paralelogramo.

Movimientos del plano. Homotecias.

Recordar los tipos de movimientos: traslaciones, giros, simetrías y simetrías con deslizamiento, con sus elementos característicos. Recordar las homotecias, centro y razón.

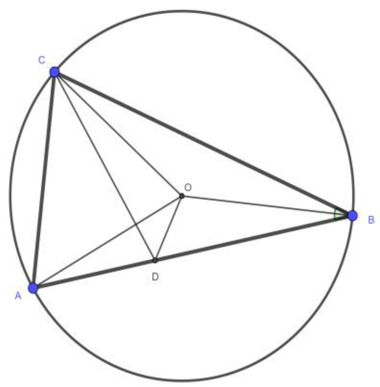
Del hecho de que una homotecia, igual que una traslación lleva rectas en rectas paralelas, se puede deducir una solución alternativa al problema 1 anterior, utilizando la homotecia *h* de centro G que lleva A en C. Entonces h lleva AD en BC, y AB en CD. Por tanto F, que es el corte de AD y FG, se transformará en H; análogamente, E se transforma en I. Luego EF se transforma en IH, luego son paralelas.

Bisectrices (interiores) de un triángulo. Son las rectas que dividen el ángulo interior en dos ángulos iguales. La simetría de eje una bisectriz del triángulo transforma un lado en el otro.

Existencia del incentro. Todo punto de la bisectriz equidista de los dos lados que la definen. El punto de corte de dos bisectrices (interior) equidista de los tres lados, luego está en la tercera bisectriz (interior).

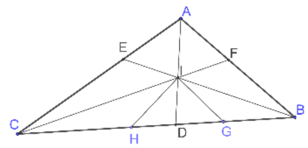
Problema nº 3 Fase local 2006. *En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC.*

Solución. Si el ángulo OBC mide α, también OBD es α, por ser OB la bisectriz. Por ser O el circuncentro, OCB y OAB son α; por ser OC una bisectriz, también OCD es α. Luego DCB es 2α; por CD una bisectriz, ACD es también 2α. OCA es 3α; por ser O circuncentro, OAC también es 3α. En suma, los ángulos del triángulo ABC miden 2α, 4α y 4α. Como la suma es 180º se concluye que los ángulos son 36º, 72º y 72º.



Problema Fase Local OME 2021 (nº 3 ampliado de 4). *En el triángulo ABC con lado mayor BC, las bisectrices se cortan en I. Las rectas AI, BI, CI cortan a BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Se consideran puntos G y H en los segmentos BD y CD, respectivamente, tales que ∠GID = ∠ABC y ∠HID = ∠ACB. Probar que ∠BHE = ∠CGF=∠CAB.*

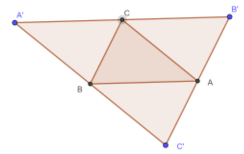
Solución. Comenzamos con una figura, donde se señalan algunas igualdades de ángulos que inmediatamente justificaremos



Nótese que los triángulos ABD y GID tienen un ángulo común en D y ángulos iguales en B y en I, por lo que sus terceros ángulos deben coincidir, es decir ∠DGI = ∠DAB. De forma análoga, razonando con los triángulos ACD y HID se obtiene ∠DHI = ∠DAC. Los triángulos BIA y BIH resultan ser congruentes por tener dos ángulos iguales y un lado común, esto revela que los puntos A y H son simétricos con respecto a la recta BI, y de forma similar A y G son simétricos respecto de CI. Las simetrías que acabamos de establecer prueban que: ∠BHE = BAE y ∠CGF = ∠CAF, y queda demostrada la igualdad de ángulos que se pedía.

Alturas de un triángulo. Son las rectas perpendiculares a un lado trazadas desde el vértice opuesto.

Existencia del ortocentro. Para demostrar que las tres alturas de un triángulo ABC son concurrentes en un punto, se trazan paralelas a los lados pasando por los vértices. Se construye así un nuevo triángulo A’B’C’



Como ABCB', ABA'C, CBC'A, CBAB', ACBC' son paralelogramos, sus lados son iguales, luego A,B,C son los puntos medios de los lados de A'B'C'. Por tanto, las alturas de ABC son las mediatrices de A'B'C' que se cortan en un punto, que se llama ortocentro de ABC.

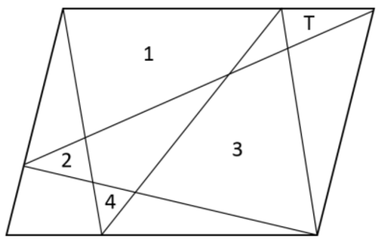
Existencia del baricentro. Se puede demostrar (usando propiedades de homotecias o de vectores) que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto, llamado baricentro, o centro de gravedad del triángulo.

Recta de Euler. Siguiendo con el razonamiento anterior se puede probar que el ortocentro, circuncentro y baricentro de un triángulo están alineados, la recta común se llama recta de Euler.

Fórmulas del área *S* de un triángulo, conocidos:

1. Base, *b*, y altura *h*: $S = ½ bh$

Problema CO+2022 de Bachillerato. *La parte exterior de la figura adjunta es un paralelogramo. Las líneas que unen lados del paralelogramo son rectas, formando 7 triángulos y 4 cuadriláteros. Las áreas del cuadrilátero 1, el triángulo 2, el cuadrilátero 3 y el triángulo 4 son, respectivamente, 72, 10, 79 y 8. ¿Cuál es el área del triángulo T?*



Solución. Con base en cada lado mayor del paralelogramo y vértice en el lado opuesto hay dos triángulos, cuya suma de áreas, por tanto, coinciden. De ahí se deduce una ecuación con las áreas de las partes en que se dividen. Con base en cada lado menor del paralelogramo hay un triángulo o dos, cuya suma de áreas coinciden. Del sistema de ecuaciones final se deduce que $T=9$.

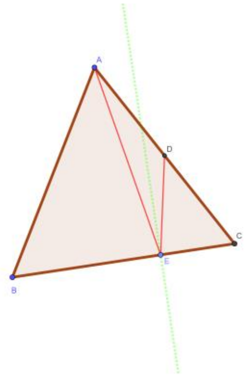
Problema. *Demuestra que en un triángulo equilátero ABC, la suma de las distancias de cualquier punto interior P a los tres lados es independiente de P. Si el punto Q no se encuentra en el interior de ABC, demuestra que la suma de distancias de Q a los tres lados es mayor o igual a aquella de P.*

Solución. Sean *X*, *Y* y Z las proyecciones de *P* en *AB*, *BC* y *CA*, respectivamente. Entonces tenemos que

$PX+PY+PZ = 2\cdot\text{área}(ABP)/AB + 2\cdot\text{área}(BCP)/BC + 2\cdot\text{área}(CAP)/CA = 2\cdot\text{área}(ABC)/AB$, que no depende de *P*. Si *Q* no está en el interior de *ABC* usamos el mismo cálculo con área(ABQ) + área(BCQ) + área(CAQ) ≥ área*(ABC).*

2. Dos lados *a,b* y el ángulo $\hat{C}$ que abarcan: $S=½\, ab \sin \hat{C}$

Problema Fase Local OME 2019 (nº 3) (ligeramente adaptado). *Sea ABC un triángulo equilátero de lado 6. Un rayo de luz parte de A, rebota en el lado BC, en el punto E, y corta al lado AC en su punto medio D. Calcular el área del triángulo ADE*



El criterio de semejanza ALA nos permite afirmar que los triángulos ABE y DCE son semejantes, y la razón de semejanza es ½, ya que el ángulo en E de ambos triángulos es el mismo por la propiedad de reflexión de la luz; el ángulo en B del primero y en C del segundo es 60º, y AB=2DC. Por tanto el área del primero es 4 veces el área del segundo, y BE=2EC. Por tanto EC=2, BE=4, CD=3. Si aplicamos la fórmula 2 del área, tenemos que el área de los triángulos ABC, ABE y DCE es, respectivamente, $9\sqrt{3},\ 6\sqrt{3},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}$. El cálculo restante ya es trivial.

3. Lados *a,b,c* (fórmula de Herón). Si *p=(a+b+c)/2*, y *R* es el circunradio:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$$

4. Semiperímetro e inradio *r*: $S = pr$

Problema Fase Local OME 2019 (nº 4) (ligeramente adaptado). *Sea p≥3 un número entero y consideremos el triángulo rectángulo de cateto mayor* p^2*-1 y cateto menor 2p. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor y es tangente a la hipotenusa y al cateto menor. Calcule el radio r del semicírculo, en función de p. Determine los valores de p para los que r es también entero.*

5. Coordenadas de los vértices $(a_1,a_2), (b_1,b_2), (c_1,c_2)$,

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2\\ 1 & b_1 & b_2\\ 1 & c_1 & c_2\end{vmatrix}$$

Esta fórmula nos permite obtener un criterio rápido de cuándo tres puntos, conocidas sus coordenadas, están alineados: en ese caso, S=0.

Problema 2/4 OMA 2022. *Sea ABC un triángulo isósceles, con AB = AC. Sea P un punto cualquiera del segmento BC, no en los extremos, y N el punto medio de AP. Se construye el trapecio (convexo)* $M_1M_2N_2N_1$ *con:* M_1 *punto medio de BP,* M_2 *punto medio de PC,* M_1N_1 *y* M_2N_2 *perpendiculares a BC, tales que N,* N_1 *y* N_2 *están alineados. Demostrar que el área del trapecio es la mitad del área del triángulo dado.*

Solución 1 El triángulo NM_1M_2 es el homotético del ABC con la homotecia de centro P y razón ½, por tanto también es isósceles. Además $M_1M_2 = BC/2$, y si E es el pie de la perpendicular desde N a BC, entonces, E es punto medio de M_1M_2. Por tanto, el área del trapecio $M_1M_2N_2N_1$ es $NE \cdot M_1M_2= (AD/2)(BC/2)$, con D el punto medio de BC, que es la mitad del área del triángulo dado.

Solución 2. Tomando un sistema de referencia en el que BC es el eje de abscisas y D el origen de coordenadas, se tiene: $A = (0, a)$, $B = (-b, 0)$, $C = (b, 0)$, $P = (c, 0)$ Entonces $N = (c/2, a/2)$, $M_1= ((c - b)/2 , 0)$, $M_2 = ((c + b)/2 , 0)$, $N_1 = ((c - b)/2 , x)$, $N_2 = ((c + b)/2 , y)$. La exigencia de que N, N_1 y N_2 estén alineados se corresponde a que $0= 4(a - x - y)$. Por tanto, la condición equivale a que $x + y = a$. Si T y S son las áreas del trapecio y del triángulo, respectivamente: $T = (x + y)/2\cdot M_1M_2 = ab/2$, $S = ab$.

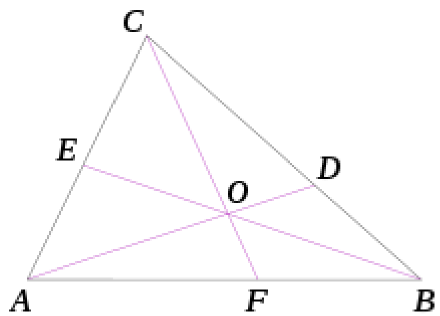
Problema 2/3 Campus La Rábida 2022. *Sea ABC un triángulo con BC = AC ≠ AB. Sea W el punto medio del arco BC de la circunferencia circunscrita que no contiene a A. La circunferencia de centro W que pasa por C vuelve a cortar a la recta AC en un punto P. Si I es el incentro de ABC, demuestra que los triángulos ABC y PIW son semejantes.*

Solución. Como W es el punto medio del arco BC de la circunferencia circunscrita que no contiene a A, tanto la bisectriz de ∠BAC como la mediatriz de BC pasan por W. Así, A, I y W están alineados y WC = WB. Además, el triángulo WIC es isósceles en W ya que si $\alpha = \beta$ y γ son los ángulos de ABC, entonces
$\angle WIC = 180^\circ - \angle CIA = \angle IAC + \angle ACI = \alpha/2 + \gamma/2$, y
$\angle ICW = \angle ICB + \angle BCW = \gamma/2 + \angle BAW = \gamma/2 + \alpha/2$.
Por tanto, la circunferencia centrada en W que pasa por C también pasa por B y por I. El simétrico de B con respecto a la recta AW es otro punto de la circunferencia, pues AW pasa por su centro. Además, como AW es una bisectriz y B está en la recta AB, su simétrico debe estar en la recta AC, así que es P o es C. C se descarta debido a que AB ≠ AC. Por simetría, el triángulo PIW es congruente a BIW, así que tenemos que ver que BIW y ABC son semejantes. Ambos son triángulos isósceles, por lo que por el criterio lado-ángulo-lado solo falta comprobar que dos ángulos son iguales, y lo son porque ∠IWB = ∠AWB = ∠ACB por arco capaz.

Teorema de Ceva. *Dado un triángulo ABC, y los puntos D, E, y F que se encuentran sobre los lados BC, CA, y AB respectivamente, los segmentos AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si* $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = 1$

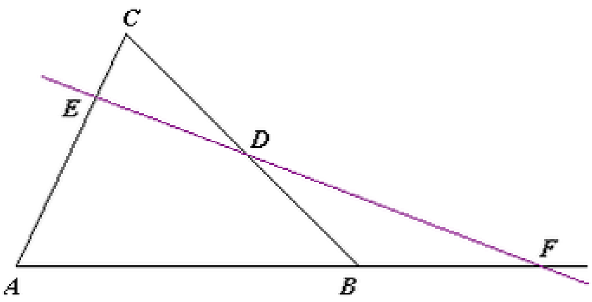
Esta relación es fácil de recordar si recorremos el perímetro del triángulo en un sentido. El primer segmento es el determinado por el vértice de partida al punto de división que se encuentra sobre el lado en el que nos estamos moviendo, el segundo segmento es el que va desde este último punto al segundo vértice, y así sucesivamente, hasta retornar al vértice de partida.

Demostración del teorema directo: Comprobar que el cociente AF/FB coincide con el cociente de las áreas de los triángulos OAF y OBF, así como con el cociente de las áreas de los triángulos CAF y CBF. De aquí se deduce que el cociente AF/FB coincide con el cociente de las áreas de los triángulos OAC y OBC. Lo análogo con las otras dos fracciones. El resto es muy simple.



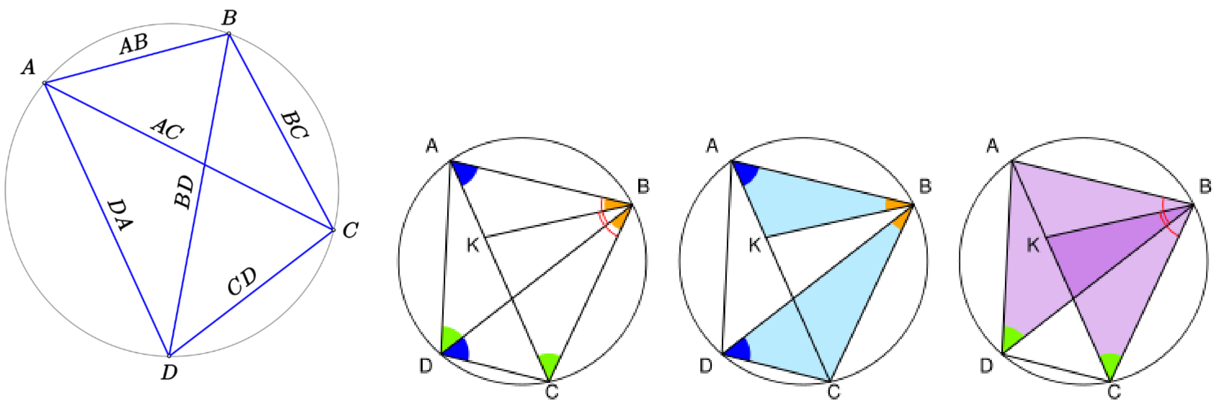
Teorema de Menelao. *Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados (o sus prolongaciones) BC, CA y AB, respectivamente. Entonces los puntos D, E y F son colineales (o están alineados) si y sólo si* $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1$

Téngase en cuenta que la relación anterior usa segmentos dirigidos.



Demostración del teorema directo: trazar perpendiculares desde *A*, *B* y *C* a la recta *DE*. Sean *P*, *P'* y *P''* los pies de las respectivas perpendiculares. Aplicar el teorema de Thales para expresar los cocientes del enunciado como cocientes de los segmentos dirigidos *AP, BP'* y *CP''*. El resto es muy simple.

Teorema de Ptolomeo. *Cuatro puntos A, B, C, D dados son cíclicos (están en una misma circunferencia) si y sólo si el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de pares de lados opuestos: AC·BD=AB·CD+AD·BC*



Demostración.- Sea *ABCD* un cuadrilátero cíclico. Se verifica la igualdad de ángulos inscritos $\angle BAC = \angle BDC$, y $\angle ADB = \angle ACB$. Se construye el punto *K* de *AC* tal que se verifica la igualdad de ángulos $\angle ABK = \angle DBC$. Ahora, por ángulos comunes $\triangle ABK$ es semejante a $\triangle DBC$, y $\triangle ABD$ es semejante a $\triangle KBC$. Por lo tanto

$AK/AB = CD/BD$, y $CK/BC = DA/BD$, y de aquí, $AK\cdot BD = AB\cdot CD$, y $CK\cdot BD = BC\cdot DA$.

Lo que implica $AK\cdot BD + CK\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA$, es decir, $(AK+CK)\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA$. Pero $AK+CK = AC$, por lo tanto $AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA$.

Aplicación: encontrar la razón áurea entre diagonales y lados de un pentágono regular.

En un cuadrilátero cualquiera, no necesariamente cíclico, se tiene la desigualdad $AC\cdot BD \leq AB\cdot CD+AD\cdot BC$

Problema 3 Fase Local 2023. *Decimos que una terna de números reales (a, b, c), todos distintos de cero, es local si*

$$a^2 + a = b^2$$
$$b^2 + b = c^2$$
$$c^2 + c = a^2$$

(a) Probar que si (a, b, c) es local, entonces $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

(b) Sea $A_1A_2 \ldots A_9$ un eneágono regular (polígono regular de 9 lados). Supongamos que $|A_1A_4| = 1$, y sea $|A_1A_2| = a$, $|A_1A_3| = b$ y $|A_1A_5| = c$. Probar que $(a, b, -c)$ es local.

Solución. (a) Sumando las tres ecuaciones obtenemos que $a + b + c = 0$. La primera ecuación se puede reescribir entonces como

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = -a = b + c,$$

y de forma análoga

$$(b - c)(b + c) = c + a, \quad (c - a)(c + a) = a + b.$$

Notemos que $a + b$, $b + c$ y $c + a$ son diferentes de 0, ya que coinciden con $-c$, $-a$ y $-b$, respectivamente. Multiplicando las tres ecuaciones y dividiendo por $(a + b)(b + c)(c + a) \neq 0$, llegamos a

$$(a - b)(b - c)(c - a) = 1.$$

(b) Las igualdades $a^2 + a = b^2$, $b^2 + b = c^2$ y $c^2 + c = a^2$ se pueden obtener aplicando el teorema de Ptolomeo a los siguientes cuadriláteros.