Ejercicios de preparación para olimpiadas. Funciones

1 de marzo de 2024

1. Funciones convexas

Comenzamos estas notas hablando de funciones convexas. Aunque la convexidad de una función se puede estudiar por técnicas de diferenciabilidad, en estas notas evitaremos tales técnicas relacionadas con el cálculo infinitesimal y optaremos un enfoque más elemental de las mismas.

Función convexa:
Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo conteniendo los extremos o no, se dice convexa si para todo x e y en I y $\lambda \in [0,1]$ debe cumplirse que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Función cóncava:
Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo conteniendo los extremos o no, se dice convexa si para todo x e y en I y $\lambda \in [0,1]$ debe cumplirse que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Ejercicio 1. ¿Dados x e y como antes, qué conjunto de puntos representa $\lambda x + (1-\lambda)y$ si $\lambda \in [0,1]$?, ¿y si $\lambda < 0$?, ¿y si $\lambda > 1$?

Ejercicio 2. Dar una interpretación geométrica (visual) de la condición de convexidad y concavidad de una función.

Una de las funciones convexas más útiles y mejor conocida es $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x \in (0,\infty)$, la *función armónica*. Veamos que efectivamente es una función convexa sin acudir a técnicas de diferenciabilidad. Sean $x, y \in (0,\infty)$ y $\lambda \in [0,1]$, entonces se tiene que

$$(\lambda y + (1-\lambda)x)(\lambda x + (1-\lambda)y) = xy + \lambda(1-\lambda)(x+y)^2 \geq xy,$$

y, dividiendo por xy y $(\lambda x + (1-\lambda)y)$,

$$\lambda\frac{1}{x} + (1-\lambda)\frac{1}{y} = \frac{\lambda y + (1-\lambda)x}{xy} \geq \frac{1}{\lambda x + (1-\lambda)y}.$$

Ejemplo 1. La funciones logaritmo natural y logaritmo decimal son cóncavas.

El próximo ejercicio propone probar que la desigualdad de la convexidad se invierte cuando salimos del intervalo que definen los puntos x e y. Contrasta este ejercicio con el Ejercicio 2.

Ejercicio 3. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Muestra que para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ tal que $\lambda x + (1-\lambda)y \in I$ se tiene que

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq f(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

A continuación se propone demostrar la desigualdad de Jensen, sin duda una desigualdad de gran utilidad en problemas de concursos de matemáticas.

Ejercicio 4. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Muestra que para cualquier natural n y números $x_1, \ldots, x_n \in I$ y números no negativos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, se tiene que

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n).$$

Prueba que ocurre lo mismo para las funciones cóncavas.

Una primera consecuencia de la desigualdad de Jensen es la desigualdad entre las medias aritmética y armónica de n números positivos.

Ejercicio 5. Dado n natural y números reales λ_i y x_i para $1 \leq i \leq n$ donde los λ_i's son como en el ejercicio anterior y los x_i son positivos, prueba que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}.$$

El próximo ejercicio da una propiedad muy característica de las funciones convexas.

Ejercicio 6. Prueba que si una función convexa está definida sobre un intervalo cerrado y acotado entonces alcanza su máximo absoluto en uno de los extremos del intervalo.

Ahora vamos con un ejercicio de concurso matemático... aunque lo daremos con algo de ayuda.

Ejercicio 7. (APMO 2002) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números naturales, y sea A su media aritmética. Muestra que

$$a_1! a_2! \cdots a_n! \geq ([A]!)^n,$$

donde $[A]$ representa el mayor entero menor que A, es decir, la parte entera de A.

Ayuda: Puedes utilizar que existe una función convexa y creciente $f(x)$ definida en $[1, \infty)$ y tal que $f(n) = \log n!$ para todo número natural n.

Ejercicio 8. ¿Puedes probar que efectivamente la función $f(x)$ anterior existe?

2. Ecuaciones funcionales

La ecuaciones donde las incógnitas son las funciones reciben el nombre de *ecuaciones funcionales.* Aunque no hay una estrategia unificada para resolverlas, sí hay algunas relaciones funcionales que suelen aparecer mucho en distintos problemas de ingenio matemático. A continuación enumeramos algunas de estas relaciones.

Ecuaciones funcionales de Cauchy. Estas ecuaciones se refieren principalmente a los siguientes tipos de ecuaciones de funciones con dos variables:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- $f(x+y) = f(x)f(y)$,
- $f(xy) = f(x) + f(y)$,
- $f(xy) = f(x)f(y)$.

Ecuación funcional de Jensen.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Encontrar todas las soluciones a este tipo de ecuaciones funcionales no siempre es fácil, sin embargo el problema suele ser mucho más atacable si se piden condiciones adicionales como monotonía, continuidad o ciertas condiciones puntuales sobre las soluciones.

Ejemplo 2. Nos proponemos encontrar todas las soluciones a la ecuación

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

para todo x, y en el dominio de f y sabiendo que 0 está en el dominio de f. En este caso, podemos hacer $y = 0$ y tenemos que

$$f(0) = f(x) + f(0)$$

para todo x en el dominio de f y, por tanto, $f \equiv 0$. Es decir, esta ecuación tiene una única solución que es la función idénticamente igual a cero.

Ejercicio 9. Sobre la misma ecuación funcional anterior suponemos ahora que los números -1 y 1 están en el dominio de f, deduce que entonces el dominio de f es simétrico respecto al origen (es decir, si f está definida en x entonces también lo está en $-x$) y que toda solución debe ser par (es decir, necesariamente $f(-x) = f(x)$).

¿Cómo serán las funciones que verifican la relación $f(x+y) = f(x) + f(y)$? En general pueden ser muy raras pero ¿qué ocurre si pedimos que su dominio sea toda la recta real, por ejemplo?

Lo primero que observamos es que si hacemos $y = 0$, entonces $f(x) = f(x) + f(0)$ por tanto que $f(0) = 0$. Tomando $y = -x$ además obtenemos que $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$, es decir, que nuestra función es impar y por tanto que basta con estudiarla para $x > 0$.

Si hacemos $y = x$ además tenemos que $f(2x) = 2f(x)$, de donde se deduce, utilizando la relación funcional que debe satisfacer la función, que $f(nx) = nf(x)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que x es racional y por tanto que $x = \frac{m}{n}$. En particular tenemos que $n \cdot x = m \cdot 1$ y, por lo anterior, $f(nx) = f(m)$ y $nf(x) = mf(1)$, de donde

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1).$$

Si hacemos $f(1) = c$ entonces acabamos de probar que $f(x) = c \cdot x$ para todo x racional.

Comentario 1. A partir de lo anterior, y conociendo con cierta profundidad las propiedades de la recta real, es fácil deducir que si f es continua o monótona entonces $f(x) = cx$ para todo x real.

Ejercicio 10. Encuentra todas las funciones monótonas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tales que

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

para todo x e y reales.

Ejercicio 11. Encuentra todas las funciones continuas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tales que

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

para todo x e y reales.

Ayuda: Buscamos soluciones que no sean idénticamente cero. Prueba que tal función debe mandar números positivos a números positivos y considera la función $g(t) = \log(f(e^t))$. Prueba que $g(s + t) = g(s) + g(t)$.

Ejercicio 12. (Shortlist IMO'04) Considera las funciones $f\colon \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ y tales que:

1. Para todo x e y, $f(xy) = f(x)f(y)$.

2. $f(30) = 1$.

3. Para todo n con último dígito igual a 7, $f(n) = 1$. La función idénticamente igual a 1 es una solución, pero ¿es la única? Si no, determina todas las soluciones posibles.

Ejercicio 13. Determina todas las funciones $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x+y) = g(x)+h(y)$.

Ejercicio 14. Prueba que si existe una constante a tal que para todo x

$$f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$$

entonces f es una función periódica, es decir, existe b tal que $f(x + b) = f(x)$ para todo x.

Ayuda: Estudia el valor de $f(x + 2a)$.

Ejercicio 15. Determina todas las funciones continuas tales que $f(x + y) + f(x - y) = 2[f(x) + f(y)]$.

Ayuda: Prueba que para x racional $f(x) = cx^2$.