Sumas y combinatoria

Antonio Medinilla y David Ramos

Problema 0.- (Calentamiento) Prueba los siguientes enunciados:

a. El número de subconjuntos de un conjunto de n elementos es 2^n

b. El número de formas de ordenar n elementos en una fila es $n!$

c. El número de formas de sentar a n personas alrededor de una mesa redonda es $(n-1)!$

d. El número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n es $\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

e. Dados a, b reales se tiene $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

f. El número de formas de guardar n juguetes en k cajas de manera que en la caja 1 tenga n_1 juguetes, la caja 2 tenga n_2, ..., la caja k tenga n_k es $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} := \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$

g. Dados a_1, a_2, ..., $a_m \in \mathbb{R}$ se tiene $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \displaystyle\sum_{\sum_i k_i = n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_k} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}$

Problema 1.- ¿Cuántos divisores impares tiene 20!? ¿Y cuántos divisores cubos perfectos? ¿Y cuántos libres de cuadrados?

Problema 2.- ¿Cuántas secuencias $(x_1, x_2, \ldots, x_{2023})$ de naturales suman 2023?

Problema 3.- El Rey Arturo debe elegir a 3 de sus 25 caballeros de la mesa redonda para enfrentarse a un dragón. ¿De cuántas formas puede hacerlo si dos caballeros que se sienten al lado en la mesa no pueden ir juntos a la aventura?

Problema 4.- Consideramos el punto del espacio P de coordenadas (x, y, z), donde x, y, $z \in \mathbb{N}$. Una partícula empieza desde el origen y sólo se puede desplazar por el espacio con pasos de longitud uno en sentido positivo de alguno de los 3 ejes. Demostrar que el número de formas que tiene de llegar a P viene dado por

$$\frac{(x+y+z)!}{x!y!z!}$$

Problema 5.- Una araña se prepara para dar un paseo. Para ello se tiene que poner sus 8 calcetines y sus 8 zapatos. ¿De cuántas formas distintas (en cuanto a orden) puede hacerlo?

Problema 6.- Diremos que $T \subset [n] := \{1, 2, ..., n\}$ es un conjunto *egoísta* si el cardinal de T es un elemento de T. ¿Cuántos conjuntos egoístas hay en $[n]$?

Problema 7.- Decimos que un número de teléfono de 7 dígitos $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ es memorable si la secuencia $d_1d_2d_3$ se repite otra vez en el resto del número (en $d_4d_5d_6$, en $d_5d_6d_7$ o en ambas). Calcula el número de números memorables que existen.

Problema 8.- Un cartero tiene n cartas para repartir entre n casas. ¿De cuántas formas puede entregar una en cada dirección de forma que ninguna carta llegase a su destinatario?

Problema 9.- ¿Cuántos equipos con un número par de miembros podemos formar con n personas?

Problema 10.- ¿Cuántas palabras de n letras del alfabeto $\{a, b, c, d\}$ tienen tanto un número de par de a's como de b's? (Por ejemplo, para $n = 2$ hay 6: aa, bb, cc, cd, dc, dd)

Problema 11.- Sean f_n el número de permutaciones de $[n]$ sin puntos fijos y g_n el de permutaciones con exactamente un punto fijo. Demuestra que para todo $n \geq 1$, $|f_n - g_n| = 1$.

Problema 12.- Dado $X \subset [n]$, definimos $p(X)$ como el producto de los elementos de X ($p(\emptyset) := 1$). Calcula $\sum p(X)$, donde X recorre todos los subconjuntos de $[n]$.

Problema 13.- Calcula la suma siguiente

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2.$$

Problema 14.- Dado $X \subset [n]$, definimos $m(X) = \sum_{x \in X} x$, y $m(\emptyset) = 0$. Diremos que X es par (resp. impar) si $m(X)$ es par (resp. impar).

a. Demuestra que el número de conjuntos pares e impares es el mismo.

b. Prueba que $\displaystyle\sum_{\substack{X \subset [n] \\ X \text{ par}}} m(X) = \sum_{\substack{X \subset [n] \\ X \text{ impar}}} m(X)$, para $n \geq 3$.

c. Calcula la suma del apartado anterior en función de n.

Problema 15.- (IMO) Sea $p_n(k)$ el número de permutaciones de un conjunto de $n \geq 1$ elementos con exactamente k puntos fijos (recuerda que que una permutación π tenga un punto fijo m significa que $\pi(m) = m$). Demuestra que

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$$

Solución 1.- Primero hay que factorizar 20!, que da $2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. Entonces los divisores...

- ...impares son los que no usan los 2'es de la factorización, luego hay $(8+1)(4+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 2160$
- ...cubos perfectos son los que usen cantidades múltiplos de 3 de primos de la factorización: $(1+6)(1+2)(1+1) = 42$
- ...libres de cuadrados son los que usen como mucho una copia de cada primo de la facorización, luego hay $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$

Solución 2.- Podemos simplificar el problema a cuántas formas hay de intercalar 2022 barras entre 2023 pelotas. Así cada número de pelotas entre dos barras representará un sumando en nuestra secuencia. Un ejemplo:

$$\bullet \;|\,|\; \bullet \quad \bullet \;|\; \bullet \quad \bullet \quad \bullet \;|\,|\,|\; \bullet \quad \bullet \quad \bullet \;|\; \bullet$$

Este diagrama representa una suma de 8 sumandos del número 10, en concreto 1+0+2+3+0+0+3+1. Sólo hay que contar cada número de pelotas que hay entre barras (o al principio o al final). Así podemos codificar todas las secuencias que sumen 2023 con un diagrama de este tipo.
Tenemos que ordenar 2023 bolas y 2022 barras para generar todos estos diagramas. Esto lo podemos hacer eligiendo qué posiciones de las $2023 + 2022 = 4045$ posibles estarán ocupadas por barras. Pero esto es elegir 2022 elementos de un conjunto de 4045, luego el número de secuencias es $\binom{4045}{2022}$.

Solución 3.- El primer caballero A puede ser cualquiera de los 25, y el segundo caballero B puede ser cualquiera de los que no se sientan a su lado (22 opciones). Ahora dependiendo de donde se siente B hay dos escenarios:
Si hay un solo caballero que se siente entre A y B, (esto pasa en 2 escenarios elegido A) C tiene 20 posibilidades. Si no, tiene 19.
Por este proceso, cada tripleta de caballeros aparece 3! veces, luego el número que buscamos es $\frac{25 \cdot (2 \cdot 20 + 20 \cdot 19))}{3!} = 1750$.

Solución 4.- Para llegar a P tenemos que dar $x + y + z$ pasos, x en el sentido positivo del eje X, y en el Y y z en el Z. Sólo hay que aclarar el orden en el que se dan. Cada camino corresponde entonces con el número de palabras formadas por x X's, y Y's y z Z's, demostrando el enunciado.

Solución 5.- Diremos que una pata de la araña está al 0% (resp. 50%, 100%) si esta descalza (resp. tiene calcetín, tiene calcetín y zapato). Hay que contar cuántos órdenes hacen que todas las patas acaben al 100%. Pero esto es el número de caminos del estilo del ejercicio 3 desde el origen al punto $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \in \mathbb{N}^8$, luego es $\frac{16!}{2!^8}(= 81729648000)$.

Solución 6.- Primero vamos a calcular cuántos conjuntos egoístas de k elementos existen. Si T tiene k elementos y $k \in T$, tenemos que elegir $k-1$ más de $n-1$ posibles (los n elementos de $[n]$ sin el k). Por tanto, hay $\binom{n-1}{k-1}$ combinaciones posibles. Luego para calcular el total tendremos que calular la suma $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$, que haciendo el cambio $k \longrightarrow k-1$ se nos simplifica en $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$, usando el binomio de Newton de $(1+1)^{n-1}$ concluimos que el número de conjuntos egoístas que están contenidos en $[n]$ es 2^{n-1}.

Solución 7.- Hay 10^3 posibilidades para la secuencia $d_1d_2d_3$.
Si esta se repite en las cifras $d_4d_5d_6$ sólo hay que elegir d_7, y hay 10 maneras de hacerlo, luego hay $10^3 \cdot 10 = 10^4$ números memorables de esta forma.
Si se repite en $d_5d_6d_7$ sólo hay que elegir d_4, e igualmente hay 10^4 números más de esta forma.
Sin embargo, hemos contado en ambos casos los números que repiten la cadena $d_1d_2d_3$ en $d_4d_5d_6$ y en $d_5d_6d_7$. Estos números deben cumplir $d_i = d_j \ \forall i, j = 1, \ldots, 7$. Luego hay 10 números memorables así. Por tanto, hay $10^4 + 10^4 - 10 = 19990$ números memorables.

Solución 8.- Para este ejercicio vamos a utilizar el principio de inclusión-exclusión. Para ello vamos a definir el conjunto A_k de manera que contiene a los casos en los que la persona k-ésima recibe su carta. Sea A el conjunto definido como las posibles combinaciones donde al menos un destinatario recibe su carta. Podemos ver que $A = \cup_{k=1}^{n} A_k$ y si aplicamos el principio de inclusión-exclusión vemos que:

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_n| \\
&= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}0! \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(n-i)! = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{n!(n-i)!}{i!(n-i)!} = n!\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}.
\end{aligned}$$

Ahora ya tenemos el número de combinaciones en las que al menos una persona recibe su carta, luego para calcular el número en el que ninguna recibe su carta vamos a restar la cantidad anterior al total. Como hay n personas y n cartas que repartir, hay un total de $n!$ posibilidades. Luego el problema se reduce a calcular

$$n! - n!\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i!} = n!\left(1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}\right) = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i!}$$

Solución 9.- Queremos calcular la suma $\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{m}$, donde m es el mayor par menor que n. Consideramos los polinomios $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ y $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$.
Si sumamos y dividimos por 2 tenemos que

$$\frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1+(-1)^k}{2}\binom{n}{k}x^k = \sum_{2|k}\binom{n}{k}x^k$$

Basta entonces evaluar $x = 1$ y tenemos que

$$\sum_{2|k}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{m} = \frac{(1+1)^n + (1-1)^n}{2} = 2^{n-1}$$

Por tanto nuestra solución es $2^{n-1} - 1$ (hay que restar el $\binom{n}{0}$, un equipo sin jugadores es raro).

Solución 10.- Este problema se resuelve con la misma idea que el anterior. Consideramos ahora el polinomio en 4 variables $(a+b+c+d)^n$. Al desarrollar los productos tendremos sumadas todas las palabras de n letras formadas por a'es, b's, c's y d's. Para eliminar las palabras con un número impar de a'es procedemos como en el ejercicio anterior: sustituimos a por $-a$, sumamos y dividimos por 2. Luego con el resultado hacemos lo mismo para las b's y tenemos que la expresión que suma todas las palabras en las que estamos interesados es

$$\frac{\frac{(a+b+c+d)^n + (-a+b+c+d)^n}{2} + \frac{(a-b+c+d)^n + (-a-b+c+d)^n}{2}}{2}$$

Sustituyendo $a = b = c = d = 1$ tenemos que el número de palabras es $4^{n-1} + 2^{n-1} + \frac{0^n}{4}$.

Solución 11.- Para $n = 1$ es trivial ($f_1 = 0$, $g_1 = 1$). En general, tenemos que $f_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. Para $n \geq 2$, todas las permutaciones de $[n]$ con exactamente un punto fijo se pueden generar eligiendo su punto fijo (n posibilidades) y aplicando una permutación sin puntos fijos al resto (f_{n-1} posibilidades). Por tanto tenemos que $g_n = nf_{n-1}$, y entonces:

$$|f_n - g_n| = \left|n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} - n\left((n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\right)\right| = n!\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\right| = n!\left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = 1.$$

Solución 12.- Sea $S(n) = \sum_{X\in S} p(X)$ la suma que queremos calcular.
Solución 1

Los subconjuntos de $[n+1]$ son los subconjuntos de $[n]$ más éstos añadiéndoles el elemento $n+1$. Por tanto,

$$S(n+1) = \sum_{X\subset[n]} p(X) + \sum_{X\subset[n]} p(X\cup\{n+1\}) = \sum_{X\subset[n]} p(X) + \sum_{X\subset[n]} (n+1)p(X) = (n+2)S(n)$$

Usando esto y que $S(0)=1$ tenemos que $S(n)=(n+1)!$.

<u>*Solución 2*</u>

Consideramos el polinomio $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(1+it)$. Su desarrollo es precisamente $\sum_{X\subset[n]} p(X)t^{\#X}$. Por tanto, la solución al problema es $f(1) = \prod_{i=1}^{n}(1+i) = (n+1)!$.

Solución 13.- Consideramos los polinomios $(1+x)^n$ y $(1-x)^n$. Si los multiplicamos, tenemos que el coeficiente de x^m en el desarrollo es

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}^2 = [x^m]\Big((1+x)^n(1-x)^n\Big) = [x^m]\Big((1-x^2)^n\Big)$$

La suma que nos piden es la suma primera con $m=n$. Entonces si n es par la suma da $\binom{n}{n/2}(-1)^{n/2}$, y si n es impar la suma da 0.

Solución 14.-

<u>*Solución 1*</u>

a. Lo probaremos por inducción. Para el caso $n=1$, $[1]$ sólo tiene dos subconjuntos: $\{\}$, que es par, y $\{1\}$, que es impar, luego el enunciado se tiene.
Supongamos que el enunciado es cierto para $n-1$ y demostrémoslo para n. Denotaremos a partir de ahora $P(n)$ (resp. $I(n)$) como el número de subconjuntos pares (resp. impares) de $[n]$. Los conjuntos pares de $[n]$ se pueden dividir en dos tipos: los que no contienen al elemento n y los que sí. Los del primer tipo son los conjuntos pares de $[n-1]$, por tanto $P(n-1)$. Los del segundo tipo dependen de la paridad de n:

   - Si n es par, los conjuntos pares del segundo tipo corresponden con los pares del conjunto $[n-1]$, luego hay $P(n-1)$. Por tanto, tenemos que $P(n) = P(n-1)+P(n-1)$, y razonando de manera similar deducimos que $I(n) = I(n-1)+I(n-1)$; y son iguales por inducción.
   - Si n es impar, los conjuntos pares del segundo tipo corresponden con los impares del conjunto $[n-1]$, luego hay $I(n-1)$. Por tanto, tenemos que $P(n) = P(n-1)+I(n-1)$, y razonando de manera similar deducimos que $I(n) = I(n-1)+P(n-1)$; y son iguales por inducción.

b. Lo veremos por inducción también. LLamaremos $S_p(n)$ y $S_i(n)$ a cada una de las sumas. El caso base $n=3$ se verifica $(12=12)$. Supongamos que $S_p(n-1) = S_i(n-1)$. Existen dos casos en función de la paridad de n:

   - Si n es par, todos los conjuntos pares de $[n]$ son los pares de $[n-1]$ más éstos añadiéndoles el elemento n. Por tanto,

   $$S_p(n) = \sum_{\substack{X\subset[n]\\ X \text{ par}}} m(X) = \sum_{\substack{X\subset[n-1]\\ X \text{ par}}} m(X) + \sum_{\substack{X\subset[n-1]\\ X \text{ par}}} m(X) + n = 2S_p(n-1) + nP(n-1)$$

   Del mismo modo, todos los conjuntos impares de $[n]$ son los impares de $[n-1]$ más éstos añadiéndoles el elemento n, luego

   $$S_i(n) = \sum_{\substack{X\subset[n]\\ X \text{ impar}}} m(X) = \sum_{\substack{X\subset[n-1]\\ X \text{ impar}}} m(X) + \sum_{\substack{X\subset[n-1]\\ X \text{ impar}}} m(X) + n = 2S_i(n-1) + nI(n-1)$$

   Pero por hipótesis de inducción $S_p(n-1) = S_i(n-1)$, y por el apartado anterior, $P(n-1) = I(n-1)$, así que hemos acabado.

- Si n es impar, todos los conjuntos pares de $[n]$ son los pares de $[n-1]$ más los impares de $[n-1]$ añadiéndoles el elemento n. Por tanto,

$$S_p(n) = \sum_{\substack{X\subset[n]\\ X \text{ par}}} m(X) = \sum_{\substack{X\subset[n-1]\\ X \text{ par}}} m(X) + \sum_{\substack{X\subset[n-1]\\ X \text{ impar}}} m(X) + n = S_p(n-1)+S_i(n-1)+nI(n-1)$$

Del mismo modo, todos los conjuntos impares de $[n]$ son los impares de $[n-1]$ más los pares de $[n-1]$ añadiéndoles el elemento n, luego

$$S_i(n) = \sum_{\substack{X\subset[n]\\ X \text{ impar}}} m(X) = \sum_{\substack{X\subset[n-1]\\ X \text{ impar}}} m(X) + \sum_{\substack{X\subset[n-1]\\ X \text{ par}}} m(X) + n = S_i(n-1)+S_p(n-1)+nP(n-1)$$

Pero por hipótesis de inducción $S_p(n-1) = S_i(n-1)$, y por el apartado anterior, $P(n-1) = I(n-1)$, así que hemos acabado.

c. Calcularemos la suma $T = \sum_{X\subset[n]} m(X)$ y la suma anterior, por el apartado anterior, será la mitad. Todo elemento de $[n]$ está en exactamente 2^{n-1} subconjuntos de $[n]$. Por tanto

$$T = \sum_{X\subset[n]} m(X) = \sum_{j=1}^{n} j2^{n-1} = 2^{n-2}n(n+1)$$

y por tanto la suma anterior es $2^{n-3}n(n+1)$ (si $n \geq 3$). Los casos $n = 1, 2$ se hacen por separado.

Solución 2

Consideramos el polinomio $F(t) = \prod_{i=1}^{n}(1+t^i)$. Podemos observar que la expansión de este producto es $\sum_{X\subset[n]} t^{m(X)} = \sum_{n\geq 0} c(n)t^n$ donde $c(n)$ es el número de $X \subset [n]$ tales que $m(X) = n$.

a. Veamos que el número de subconjuntos pares es 2^{n-1}, ya que el número de subconjuntos de $[n]$ es 2^n. Usando el truco anterior, tenemos que $\sum_{2|n} c(n)t^n = \frac{F(t)+F(-t)}{2}$, luego

$$\sum_{2|n} c(n) = \frac{F(1)+F(-1)}{2} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+(1)^i) + \prod_{i=1}^{n}(1+(-1)^i)}{2} = 2^{n-1}$$

b. Usando que $F(t) = \sum_{X\subset[n]} t^{m(X)}$ tenemos que $F'(t) = \sum_{X\subset[n]} m(X)t^{m(X)-1}$, y por tanto

$$T := \sum_{X\subset[n]} m(X) = F'(1) = \sum_{j=1}^{n} jt^{j-1} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(1+t^i)\Bigg|_{t=1} = \sum_{j=1}^{n} j\cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}n(n+1)$$

Veamos que la suma de las $m(X)$ de los conjuntos pares es precisamente la mitad:
De la expresión de $F'(t)$ tenemos que

$$\sum_{\substack{X\subset[n]\\ X \text{ par}}} m(X) = \frac{F'(t)-F'(-t)}{2}\Bigg|_{t=1} = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} jt^{j-1}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(1+t^i)\Bigg|_{t=1} - \sum_{j=1}^{n} j(-t)^{j-1}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(1+(-t)^i)\Bigg|_{t=1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} j2^{n-1} - 0\right] = 2^{n-3}n(n+1)$$

y de paso hemos resuelto el apartado c).

Solución 15.- La suma cuenta el número de puntos fijos entre todas las permutaciones de $[n]$. Como cada elemento es punto fijo de exactamente $(n-1)!$ permutaciones, estamos contando cada elemento de $[n]$ $(n-1)!$ veces. Luego la suma da $n\cdot(n-1)! = n!$.