PREPARACIÓN OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA (CURSO 2023-24)

PRINCIPIO DEL PALOMAR 26-01-2024

Principio del palomar o principio de Dirichlet:
si M palomas ocupan N nidos y M es mayor que N, entonces hay al menos un nido con dos o más palomas.
si M palomas ocupan N nidos y M es mayor que N, entonces no es posible que en cada nido haya menos de $\frac{M}{N}$ palomas.

1) Demuestra que entre seis personas hay un grupo de tres personas que o bien se conocen todas entre sí o bien no se conoce ninguna entre sí.

2) A una comida asisten 10 personas que se sientan en una mesa redonda. Delante de cada plato hay un cartel con el nombre del comensal, pero se sientan al azar y ninguno de ellos se sienta en el lugar que le corresponde. Demuestra que se puede girar la mesa de modo que al menos dos personas estén en su sitio.

3) En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes. Se sabe que en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demuestra que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo. (Fase Nacional 1993)

4) Escojamos al azar n números naturales. a) Prueba que siempre hay dos de ellos cuya diferencia en múltiplo de n-1. b) Prueba que o uno de ellos es múltiplo de n o hay dos de ellos cuya diferencia es múltiplo de n. c) Prueba que hay un subconjunto de esos números cuya suma es múltiplo de n.

5) Justifica que entre los términos de la sucesión de Fibonnaci, hay dos cuya diferencia es múltiplo de 2024.

6) Prueba que hay una potencia de tres que acaba en 001. Generaliza el resultado.

7) Escoge un número natural cualquiera, n, y un dígito no nulo, a. Prueba que hay un múltiplo de n que está formado solo por a y 0. Y si n no los factores primos 2 y 5, entonces hay un múltiplo de n formado solo por a.

8) Se da un conjunto de 10 enteros positivos de dos cifras. Prueba que hay dos subconjuntos disjuntos de ese conjunto de números cuyos elementos tienen la misma suma.

9) En una circunferencia se efectúan diez marcas, y se asignan aleatoriamente los números del 1 al 10 a esas marcas. Considera todas las sumas que se pueden formar con tres de ellos consecutivos. Justifica que siempre existirá una suma que presente un resultado superior a 16.

10) En un hexágono regular de lado unidad se sitúan 19 puntos. Demuestra que hay al menos un par de ellos separados por una distancia no mayor que $\sqrt{3}/3$. (Fase Local 2011)

11) Considera 37 puntos en el espacio con coordenadas enteras. Prueba que se pueden encontrar entre ellos tres puntos tales que su baricentro tiene también coordenadas enteras.

12) A un concierto asisten 2024 personas de cuatro nacionalidades. Cada persona paga por su entrada un número entero de euros entre 1 y 510 inclusive.
a) Prueba que al menos dos personas de la misma nacionalidad pagaron el mismo precio.
b) Se saben que se vendieron al menos una entrada de cada precio y que el máximo número de entradas que se vendieron de cada precio fueron 10. ¿Cuáles fueron las cantidades máxima y mínima que se pudieron recaudar en el concierto?

13) 41 torres de ajedrez se colocan en un tablero de 8x8. Probar que tiene que haber 6 que no se atacan entre sí.

14) Las casillas de un tablero de 15x15 se pintan en tres colores azul, verde y rojo. Prueba que hay al menos dos columnas con el mismo número de casillas de al menos uno de los colores.

15) Sea x un número irracional. Justifica que hay un entero n tal que la distancia desde nx a algún entero es menor que 0,001.